МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У. Д. АЛИЕВА

Р.А. Боташев, С.К. Байчорова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Карачаевск, 2018

УДК 519.85 Печатается по решению редакционно-издательского со-
ББК 22.17 вета Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева, кафедры матанализа (Пртокол №7 от 26.03.18), кафедры экономических и финансовых дисциплин (Протокол №8 от 16.03.18)

Математические методы в задачах экономики: Учебное пособие / Боташев Р.А., Байчорова С.К., - Карачаевск: КЧГУ, 2018 – 220 с.

ISBN 978-5-8307-0538-7

Учебное пособие содержит краткий теоретический материал по математическому программированию, экономический теории, и математической статистике необходимый для решения практических задач по экономике и статистике, сопровождается примерами с решением практических задач, заданий для самостоятельной работы студентов.

Пособие охватывает базовые вопросы рабочих программ дисциплин «Математическое программирование». «Статистика» и «Экономическая теория» основной образовательной программы направлений подготовки: 09.03.03 «Прикладная информатика» (профиль: «Прикладная информатика», «Прикладная информатика в экономике»), 38.03.01 «Экономика» (профиль: «Бухучёт, анализ и аудит», «Финансы и кредит»).

Пособие предназначено для студентов, магистрантов, аспирантов и специалистов, интересующихся вопросами экономико-математического моделирования.

Рецензенты:

к.ф-м.н., доцент З.М. Лайпанова

к.э.н., доцент М. Х-К. Батчаев

ISBN 978-5-8307-0538-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих основы информатики и экономики, экономико-математические модели и методы их решения на основе методов математического программирования.

В пособии приведены экономические задачи, алгоритм составления их математических моделей, показано практическое применение методов математического программирования при их решении.

Как известно, по определению экономика – это деятельность людей, связанная с обеспечением материальных условий их жизни. Следовательно, основная задача экономики заключается в том, чтобы при ограниченных ресурсах удовлетворить постоянно растущие потребности людей в товарах и услугах. Решить эту задачу можно только путем выбора оптимального варианта использования ограниченных экономических ресурсов в производстве. Для решения такого рода задач, как нельзя лучше подходят модели и методы математического программирования.

Однако наличие нескольких возможных решений, а также то, что даже небольшое увеличение размерности задачи, усложняет возможность их решения аналитически, а иногда и делает невозможным, и это приводит к необходимости использования программных комплексов для автоматизации математических и инженерно-технических расчётов. Напомним, что к таким комплексам относятся пакеты программ Mathcad, MatLab, Mathematica, Maple и др. Задачи математического программирования можно решать также и в среде Excel.

В данном учебном пособии для удобства освоения и закрепления материал дается в следующей последовательности:

а) экономическая постановка (смысл) задачи;

б) математическая постановка (модель) задачи;

в) метод (алгоритм) решения задачи;

г) пример (решение) практической задачи;

д) задачи для самостоятельной работы.

Просьба пользователям: все обнаруженные ошибки и пожелания написать по адресу: **botashevruslan@mail.ru**

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГАММИРОВАНИЕ

1.1 Основные понятия математического программирования

Математическое программирование - это область математики, разрабатывающая теорию решения многомерных задач с ограничениями. В отличие от классической математики, математическое программирование занимается математическими методами решения задач и нахождения наилучших вариантов из всех возможных.

Математическое программирование – математическая дисциплина, которая посвящена теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями, то есть равенствами и неравенствами.

Математическое программирование – это раздел математической науки об исследовании операций, охватывающий широкий класс задач экономики и управления, экономико-математическими моделями которых являются конечномерные экстремальные задачи. Задачи математического программирования находят свое применение в различных областях человеческой деятельности, где необходимым является выбор одного из возможных образов действий, например, при решении многочисленных проблем управления и планирования производственных процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования.

Наименование "Математическое программирование" связано с тем, что целью решения задач является выбор программы действий, планирование.

Многие методы математического программирования, разработаны для задач минимизации или максимизации функций конечного числа переменных. При этом в конкретных задачах важен правильный выбор подходящего функционального пространства, в котором следует её рассматривать. При выборе такого пространства обычно учитываются физические соображения, свойства допустимых управлений, свойства решений соответствующих начально-краевых задач при фиксированном управлении и т.п.

Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Оптимизация – в математике, информатике и исследовании операций задача нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в некоторой области конечномерного векторного пространства, ограниченной набором линейных (нелинейных) равенств и (или) неравенств.

Теорию и методы решения задачи оптимизации изучает математичекое программирование.

Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например

- количество продукции - расход сырья
- количество продукции - качество продукции

Выбор компромиссного варианта для указанных свойств и представляет собой процедуру решения оптимизационной задачи.

При постановке задачи оптимизации необходимо: наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. При этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, так как практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого.

Рассмотрим типичный пример неправильной постановки задачи оптимизации: "Получить максимальную производительность при минимальной себестоимости". Здесь ошибка заключается в том, что ставится задача поиска оптимальности 2-х величин, противоречащих друг другу по своей сути.

Напомним, что правильная постановка задачи могла быть следующая:

а) получить максимальную производительность при заданной себестоимости;

б) получить минимальную себестоимость при заданной производительности;

В первом случае критерий оптимизации - производительность, а во втором - себестоимость.

2. Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта.

3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

4. Учет ограничений.

Обычно оптимизируемая величина связана с экономичностью работы рассматриваемого объекта (аппарат, цех, завод). Оптимизируемый вариант работы объекта должен оцениваться какой-то количественной мерой - критерием оптимальности.

Отметим, что критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение.

Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации. Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению экстремума целевой функции.

1.1.1 Экономико-математическое моделирование

Из экономической теории известно, что в экономике действуют устойчивые количественные закономерности, что дает возможность описать их на языке математики.

Как было сказано выше экономика – это деятельность людей, т.е. протекание экономических процессов невозможно без влияния человеческих, социально-психологических факторов, что не дает возможность проведения экспериментальных исследований в экономике. Поэтому для исследования экономических систем и процессов применяют один из мощных исследовательских методов - *математическое моделирование* - формальное описание изучаемого явления и исследование с помощью математического аппарата.

При построении и решении математических моделей необходимо определить, зачем нужна данная модель, цели ее решения, параметры, управляющие переменные, области допустимых решений, т.е. ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.

Также нужно выявить неизвестные факторы, которые меняются случайным образом и могут влиять на результат.

В итоге необходимо выразить целевую функцию - критерий оптимальности через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы.

Введем следующие условные обозначения:

a - параметры модели;

x - управляющие переменные или решения;

X - область допустимых решений (ОДР);

ξ - случайные или неопределенные факторы;

F - целевая функция, или критерий эффективности (критерий оптимальности), которая записывается как $F = F(x, a, \xi\ )$.

В соответствии с введенными обозначениями математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$F = F(x, a, \xi\ ) \to \underset{x \in X}{extr}, \text{где } extr = \begin{Bmatrix} min \\ max \end{Bmatrix}.$$

Задача предполагает нахождение такого оптимального решения, $x^* \in X$, чтобы при данных фиксированных параметрах a и с учетом неизвестных факторов ξ был получен экстремум целевой функции F, т.е.

$$F^* = F(x^*, a, \xi\ ) = \underset{x \in X}{extr}\{F(x, a, \xi\ )\}.$$

Таким образом, *оптимальное решение* - это решение, предпочтительное (наилучшее) перед другими по определенному критерию эффективности (одному или нескольким).

Моделирование – это изучение, исследование не самих реальных процессов, явлений, объектов или их систем, а их объектов-заместителей, то есть построение и изучения их моделей.

Моделирование, как процесс изучения реальных объектов состоит из трех элементов - это субъекта (исследователь); объекта исследования; модели, опосредствующей отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Модель – это объект, отображающий основные свойства, черты и их взаимосвязи, важные для данного исследования и замещающий оригинал.

Модель идеализация отображаемого объекта, то есть она содержит характеристики объекта, являющиеся основными, значимыми для данного исследования, при этом модель не должна искажать сути реального объекта, т.е. должна быть адекватной. Помимо свойства адекватности модель должна обладать определенной степенью устойчивости, т.е. должна быть корректно составленной.

Математическая модель - это абстракция реального мира, в которой интересующие исследователя отношения между реальными элементами заменены подходящими отношениями между математическими объектами.

Математическая модель - представляет собой совокупность математических соотношений, отражающие важнейшие свойства исследуемого объекта, законы которым он подчиняется, связи которые существуют между составляющими его частями и т.д.

Экономико-математическая модель - математическое описание экономического явления, процесса или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи (поэтому часто термины “модель” и “задача” употребляются как синонимы).

В практическом плане экономико-математические модели используются как инструмент прогноза, планирования, управления и совершенствования различных сторон экономической деятельности общества.

Рассмотрим основные элементы математической модели (рис.1)

Экзогенные переменные - это те переменные, которые задаются вне модели, т.е. они известны заранее.

Эндогенные переменные - это те переменные, которые определяются в ходе расчетов по модели и не задаются в ней извне.

Параметры модели – это характеристики, которые должны быть известны для построения модели - это коэффициенты уравнений (неравенств), функциональных зависимостей модели.

Часто экзогенные переменные и параметры в модели не разделяют.

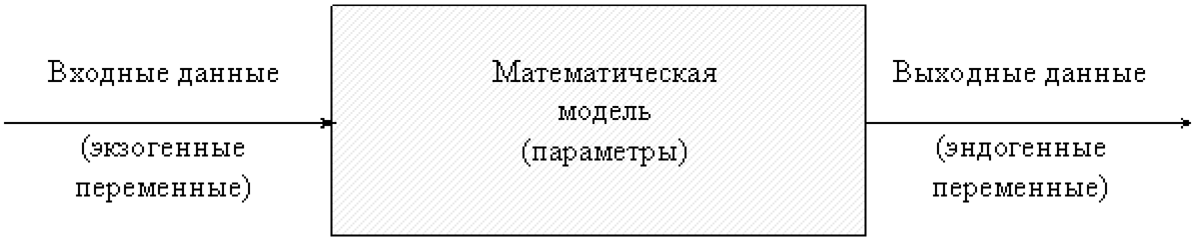


Рис. 1

Процесс экономико-математического моделирования - это описание экономических и социальных систем и процессов в виде экономико-математических моделей.

Принципы построения математической модели:

1. Необходимо соизмерять точность и подробность модели, во-первых, с точностью тех исходных данных, которыми располагает исследователь, и, во-вторых, с теми результатами, которые требуется получить.

2. Математическая модель должна отражать существенные черты исследуемого объекта или явления и при этом не должна его сильно упрощать.

3. Для полноценного исследования реального процесса лучше использовать несколько моделей, для построения которых применяют разные математические методы. Если при решении этих моделей получают схожие результаты, то исследование заканчивается. Если же результаты сильно различаются, то следует пересмотреть постановку задачи.

4. Любая сложная система всегда подвергается малым внешним и внутренним воздействиям (возмущениям), следовательно, математическая модель должна быть устойчивой, т.е. сохранять свои свойства и структуру при этих воздействиях.

Этапы построения экономико-математических моделей

Первый этап - постановка экономической проблемы и ее качественный анализ, т.е. построение качественной модели. Для этого устанавливаются цели исследования, нужно четко сформулировать сущность проблемы, вопросы, на которые требуется получить ответы.

Выделяются главные и второстепенные характеристики свойственные данному процессу, закономерности которым они подчиняются. Второстепенные характеристики, которые в общем не влияют на результат, отбрасываются.

На этом этапе проводится изучение структуры объекта и основных зависимостей, связывающих его элементы; формулирование гипотез (хотя бы предварительных), объясняющих поведение и развитие объекта.

Второй этап – этап формализации экономической проблемы, т.е. построение математической модели. На этом этапе, задача исследователя заключается в том, чтобы все характеристики свойственные данному процессу, проблеме, все связи между ними суметь записать в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.), то есть суметь формализовать данную проблему.

Для этого определяется тип математической модели, а затем устанавливается конкретный перечень переменных и параметров (т.е. характеристики системы разделяются на параметры и переменные модели), форма связей. При построении математической модели экономического объекта, нужно учитывать универсальность математических моделей, т.е. возможность использовать одну и ту же модель при описании разных процессов. Поэтому, при решении экономической задачи, сначала необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели.

Третий этап – решение математической модели, исследование влияния переменных на значение целевой функции.

Проводится математический анализ модели - выясняются общие свойства модели, проводится доказательство существования решений в сформулированной модели, если математическая задача не имеет решения, то модель непригодна для исследования процесса и следует скорректировать либо постановку экономической задачи, либо способы ее математической формализации. Здесь применяются чисто математические приемы исследования.

При аналитическом исследовании модели выясняются такие вопросы, как, например, единственно ли решение, какие переменные (неизвестные) могут входить в решение, каковы будут соотношения между ними, в каких пределах и в зависимости исходных условий они изменяются, каковы тенденции их изменения и т.д. Аналитической исследование модели по сравнению с эмпирическим (численным) имеет то преимущество, что получаемые выводы сохраняют свою силу при различных конкретных значениях внешних и внутренних параметров модели.

Четвертый этап – установление адекватности модели реальному объекту, то есть экспертная проверка результатов. Если модель адекватна, то она принимается, если нет, то уточняется исходная информация, постановка задачи и т.д., составляется другая модель.

1.2 Линейное программирование

В классическом математическом анализе рассматривается задача отыскания условного экстремума функции. Но в современном мире в различных сферах человеческой деятельности возникают оптимизационные задачи, для решения которых методов классического математического анализа недостаточно.

Многие проблемы, возникающие в экономических исследованиях, планировании и управлении, будучи сформулированными математически, представляют собой задачи, в которых необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений или неравенств и среди всех неотрицательных решений найти то решение, при котором линейная функция принимает наибольшее или наименьшее значение.

Изучение методов исследования и решения математических задач указанного типа составляет содержание раздела математики, который называется линейным программированием.

Линейное программирование является составной частью раздела математики, который изучает методы нахождения условного экстремума функций многих переменных и называется математическим программированием.

Если целевая функция и система ограничений линейны, то задача математического программирования называется задачей линейного программирования (ЗЛП).

Задачами линейного программирования называются задачи, в которых линейны как целевая функция, так и ограничения в виде равенств и неравенств. Кратко задачу линейного программирования можно сформулировать следующим образом: найти вектор значений переменных, доставляющих экстремум линейной целевой функции при m ограничениях в виде линейных равенств или неравенств.

К числу задач линейного программирования можно отнести задачи:

- рационального использования сырья и материалов;
- задачи оптимизации раскроя;

- оптимизации производственной программы предприятий;
- оптимального размещения и концентрации производства;
- составления оптимального плана перевозок, работы транспорта;
- управления производственными запасами;

и многие другие, принадлежащие сфере оптимального планирования.

Первые постановки задач линейного программирования были сформулированы известным советским математиком Л.В. Канторовичем, которому за эти работы была присуждена Нобелевская премия по экономике.

1.2.1 Типы задач линейного программирования

Существуют три основных типа задач линейного программирования: общая, стандартная и каноническая.

1. Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП) называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения целевой функции $F(\bar{\mathbf{x}})$:

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при условиях (ограничениях):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = \overline{1, m_1}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (i = \overline{m_2 + 1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n_1}), \quad n_1 < n$$

x_j − произвольные $\qquad (j = \overline{n_1 + 1, n})$,

где c_j, a_{ij}, b_i - заданные действительные числа;

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow max(min)$$

- целевая функция (линейная форма) задачи;

$$\bar{\mathrm{x}} = (x_1; \cdots; x_n) - \text{план задачи.}$$

В расширенной форме (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), (1.1.4) соответственно примут вид:

$$F(\bar{\mathbf{x}}) = (c_1\, x_1 + \ c_2\, x_2 + \cdots + \ c_n\, x_n) \rightarrow max(min)$$

$$\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + \ a_{12}\, x_2 \ + \cdots \ + \ a_{1n}\, x_n \ \le b_1 \\
a_{21}\, x_1 + \ a_{22}\, x_2 \ + \cdots \ + \ a_{2n}\, x_n \ \le b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m_1 1}\, x_1 + \ a_{m_1 2}\, x_2 + \cdots + \ a_{m_1 n}\, x_n \le b_{m_1} \\
a_{m_1+1,1}\, x_1 + \ a_{m_1+1,2}\, x_2 + \cdots + \ a_{m_1+1,n}\, x_n = b_{m_1+1} \\
a_{m_1+2,1}\, x_1 + \ a_{m_1+2,2}\, x_2 + \cdots + \ a_{m_1+2,n}\, x_n = b_{m_1+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m_2,1}\, x_1 + \ a_{m_2,2}\, x_2 \ + \cdots + \ a_{m_2,n}\, x_n \ = b_{m_2} \\
a_{m_2+1,1}\, x_1 + \ a_{m_2+1,2}\, x_2 + \cdots + \ a_{m_2+1,n}\, x_n \ge b_{m_2+1} \\
a_{m_2+2,1}\, x_1 + \ a_{m_2+2,2}\, x_2 + \cdots + \ a_{m_2+2,n}\, x_n \ge b_{m_2+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}\, x_1 \ + \ a_{m2}\, x_2 \ + \ \cdots + \ a_{mn}\, x_n \ge b_m
\end{array}$$

2. Стандартной (симметричной) задачей линейного программирования называют задачу определения максимального значения целевой функции $F(\bar{\boldsymbol{x}})$

$$F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow max;$$

при условиях (ограничениях):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \le b_i \qquad (i = \overline{1, m}),$$

$$\begin{cases}
a_{11}\, x_1 + \ a_{12}\, x_2 + \cdots + \ a_{1n}\, x_n \ \le b_1 \\
a_{21}\, x_1 + \ a_{22}\, x_2 + \cdots + \ a_{2n}\, x_n \ \le b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}\, x_1 + \ a_{m2}\, x_2 + \cdots + \ a_{mn}\, x_n \le b_m
\end{cases}$$

$$x_j \ \ge 0 \ (j = \overline{1, n})$$

или задачу определении минимального значения функции $F(\bar{\mathbf{x}})$

$$F(\overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \to min;$$

при условиях (ограничениях):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \geq b_i \qquad (i = \overline{1,m}),$$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + \ a_{12}\, x_2 + \cdots + \ a_{1n}\, x_n \ \ \geq b_1 \\ a_{21}\, x_1 + \ a_{22}\, x_2 + \cdots + \ a_{2n}\, x_n \ \ \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \ a_{m2}\, x_2 + \cdots + \ a_{mn}\, x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_j \ \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$$

В экономической практике эти задачи встречаются наиболее часто.

3. Канонической (или основной) задачей ЛП называют задачу определения максимального (минимального) значения линейной целевой ции $F(x)$:

$$F(\overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ = (c_1\, x_1 + \ c_2\, x_2 + \cdots + \ c_n\, x_n) \to max(min)\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ = b_i \qquad (i = \overline{1,m}),$$

В расширенной форме ограничения примут вид:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + \ a_{12}\, x_2 + \cdots + \ a_{1n}\, x_n \ \ = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + \ a_{22}\, x_2 + \cdots + \ a_{2n}\, x_n \ \ = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \ a_{m2}\, x_2 + \cdots + \ a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases}$$

$$x_j \ \geq 0 \qquad\qquad (j = \overline{1,n})$$

Каноническая (основная) задача	Стандартная (симметричная) задача	Общая задача
1) ограничения		

Уравнения $$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}x_j} = \boldsymbol{b_i}$$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,m}})$, .	Неравенства $$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}x_j} \le (\ge) \boldsymbol{b_i}$$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,m}})$,	Уравнения и неравенств $$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij}x_j} \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} \boldsymbol{b_i}$$ $(\boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,m}})$,
2) условия неотрицательности		
Все переменные $\boldsymbol{x_j} \ge \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,n}})$	Все переменные $\boldsymbol{x_j} \ge \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,n}})$	Часть переменных $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,n_1}), n_1 \le n$ x_j -произвольные$(j = \overline{n_1 + 1, n})$
3) цель задачи $$\boldsymbol{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_j x_j}$$		
max $F(\mathbf{x})$ или min $F(\mathbf{x})$	Max $F(\mathbf{x})$ [min $F(\mathbf{x})$]	max $F(\mathbf{x})$ или min $F(\mathbf{x})$

Способы преобразования. При необходимости задачу минимизации можно заменить задачей максимизации и наоборот. В самом деле, если $\boldsymbol{x}^*$ - точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции одной переменной это утверждение очевидно. Если $\boldsymbol{x}^*$ - точка минимума функции $y = f(x)$, то для функции $y = -f(x)$ она является точкой максимума, так как графики функций $f(x)$ и $-f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс (рис. 1.1)

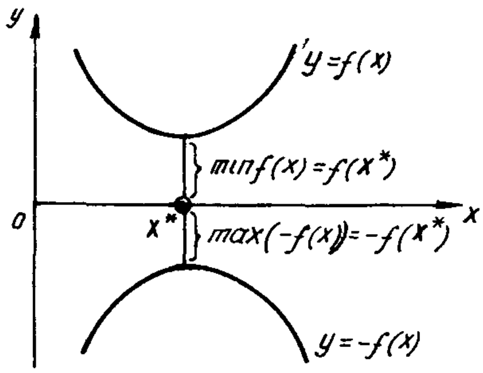


Рис.1.1

Итак, $\min f(x^*) = -\max(-f(x^*))$.

То же самое имеет место и в случае функции n переменных: $\min f(x_1^*, \cdots, x_n^*) = -\max(-f(x_1^*, \cdots, x_n^*))$.

Формы записи задач линейного программирования.

Матричная форма записи ЗЛП.

Для этого в модели введем обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$C = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_n];$$

где C- матрица – строка коэффициентов при переменных в целевой функции;

A – матрица системы уравнений; X – матрица - столбец переменных;

A_0 – столбец свободных членов.

Матричная форма записи канонической (основной) задачи ЛП:

$$\max F(x) = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_n][x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$X \geq O,$$

или $\max F = CX, AX = A_0, X \geq O.$

Векторная форма записи канонической (основной) задачи ЛП. Для столбцов матрицы A введем обозначения:

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{j}} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \cdots, \overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Каноническая задача в векторной форме записи примет вид:

$$\max F = \bar{\mathbf{c}}\,\bar{\mathbf{x}}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1 x_1 + \cdots + \overline{\boldsymbol{A}}_j x_j + \cdots + \overline{\boldsymbol{A}}_n x_n = \overline{\boldsymbol{A}}_0,$$

$$\bar{\mathbf{x}} \geq 0,$$

где $\bar{\mathbf{c}}\,\bar{\mathbf{x}}$ – скалярное произведение векторов

$$\bar{\boldsymbol{c}} = (c_1;\ c_2;\ \cdots\ c_n) \text{ и } \quad \bar{\mathbf{x}} = (x_1;\ x_2;\ \cdots\ x_n).$$

1.2.2 Опорное решение задачи линейного программирования

Целевая функция $F(x)$ вместе с системой ограничений, наложенных на переменные $x_1;\ x_2;\ \cdots\ x_n$ называется *математической моделью* линейного программирования.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $\bar{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1;\ \mathrm{x}_2;\ \cdots\ \mathrm{x}_\mathrm{n})$, удовлетворяющий системе ограничений и условиям неотрицательности.

Множество допустимых решений (планов) задачи образует *область допустимых решений* (ОДР).

Базисным решением системы называется частное решение, в котором неосновные переменные имеют нулевые значения. Любая система уравнений имеет конечное число базисных решений, равное C_n^r, где $\boldsymbol{n}$ – число неизвестных, $\boldsymbol{r}$ – ранг системы векторов условий. Базисные решения, координаты которых удовлетворяют условию неотрицательности, являются *опорными.*

Опорным решением (*планом*) задачи линейного программирования называется такое допустимое решение $\bar{\mathrm{x}} = \left(\mathrm{x}_{1_0};\ \mathrm{x}_{2_0};\ \cdots \mathrm{x}_{\mathrm{m}_0}, 0, \cdots, 0\right)$, для которого система векторов $\bar{\mathrm{A}}_1, \bar{\mathrm{A}}_2, \cdots, \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{m}}$ входящих в разложение с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Пусть дана система:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \ a_{12}\,x_2 + \cdots + \ a_{1n}\,x_n \ = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ a_{22}\,x_2 + \cdots + \ a_{2n}\,x_n \ = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\,x_1 + \ a_{m2}\,x_2 + \cdots + \ a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ - матрица системы уравнений;

Пусть в данной системе все «**m**» уравнений независимы, т.е. $r(A) = m, m < n.$

Определение. Любые «m» переменных этой системы называют основными или базисными, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные $(n - m)$ переменных называются свободными.

Число отличных от нуля координат опорного плана не может превосходить ранга $\boldsymbol{r}$ системы векторов условий (т. е. числа линейно независимых уравнений системы ограничений).

Опорный план называется невырожденным, если он содержит ровно $\boldsymbol{m}$ положительных компонент, в противном случае он является вырожденным.

Базисом опорного плана называется базис системы векторов условий задачи, в состав которой входят векторы, соответствующие отличным от нуля координатам опорного решения.

План $\bar{\mathbf{x}}^* = (\,\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}^*\,)$, при котором целевая функция принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным.

Определение. Пусть $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$,– произвольные точки евклидова пространства E_n. Выпуклой линейной комбинацией этих точек называется ма $\bar{\mathbf{x}}$:

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_1\, \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x_n},$$

где α_i – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, (i = \overline{1,n})$$

Определение Множество $G \subset E_n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками $\boldsymbol{x_1} \in G$ и $\boldsymbol{x_2} \in G$ оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию $\bar{\mathbf{x}} = \alpha\, \boldsymbol{x_1} + (1-\alpha)\boldsymbol{x_2}$ для $\alpha \in [0;1]$.

Иначе G- выпуклое множество, если оно вместе с любыми двумя своими точками, содержит и отрезок, соединяющий эти точки.

Определение Точка $\bar{\mathbf{x}}$ выпуклого множества называется угловой, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Определение. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется многогранником решений, а всякая угловая точка многогранника решений – вершиной**.**

Теорема 2. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений.

Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 3. Любое опорное решение является угловой точкой области допустимых решений.

Теорема 4. Любая угловая точка области допустимых решений является опорным решением.

Выводы.

1. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник.

2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план.

3. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

4. Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

1.3 Методы решения задач линейного программирования

1.3.1 Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для:

1. решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;

2. решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального (минимального) значения функции F:

$$\max(\min) f(\mathrm{x}) = \max(\min)(c_1x_1 + c_2x_2) \quad (1.2.1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \qquad \left(i = \overline{1,k}\right), \quad (1.2.2)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1; 2). \quad (1.2.3)$$

Так, как линейное неравенство определяет некоторую полуплоскость с граничной прямой полученной из рассматриваемого неравенства, то все неравенства, входящие в систему ограничений (1.2.2) и (1.2.3) также определяют некоторые полуплоскости в плоскости, с системой координат x_1Ox_2.

Что бы определить полуплоскость, удовлетворяющую данному неравенству:

1) Чертим граничную прямую $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$;

2) Берем произвольную точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, порожденных граничной прямой и подставляем в данное неравенство. Если получили верное неравенство, то полуплоскость является решением неравенства и ее штрихуем. Если же получается неверное неравенство, то штрихуется противоположная полуплоскость, которая и является решением неравенства.

Если система неравенств (1.3.2) и (1.3.3) совместна, то множество ее решений есть область, принадлежащая всем полуплоскостям одновременно, являющаяся выпуклым многоугольником, называемая многоугольником решений. Стороны этого многоугольника лежат на граничных прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Так как целевая функция достигает своего экстремального значения в некоторой угловой точке многогранника решений, то максимум или минимум ищется в ее вершинах. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Что бы определить вершину в которой целевая функция достигает максимума (минимума) строим линию уровня целевой функции F:

$c_1x_1 + c_2x_2 = k$ (где k – некоторая постоянная), получаем прямую в каждой точке которой F принимает одно и тоже значение k.

Затем находим градиент функции

$$grad\ F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2) = \vec{c},$$

который является нормальным вектором к линии уровня функции цели.

Перемещая линию уровня в направлении вектора $grad\ F = \vec{c}$, проходя через вершины многоугольника решений, доходим до вершины, когда дальнейшее перемещение дает пустое множество. Эта вершина и является точкой максимума заданной функции. Если таких вершин будет две, то все точки, лежащие на отрезке соединяющей эти вершины будут точками максимума функции цели.

Перемещая линию уровня в направлении противоположном вектору $\boldsymbol{n}$, аналогичным образом найдем точки минимума.

На рис.1 показан случай, когда функция F принимает максимальное значение в единственной точке *A*. На рис.2 показан случай, когда функция F принимает максимальное значение в любой точке отрезка *AB*.

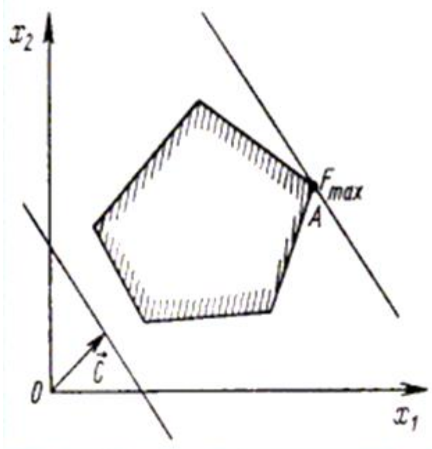


Рис.1

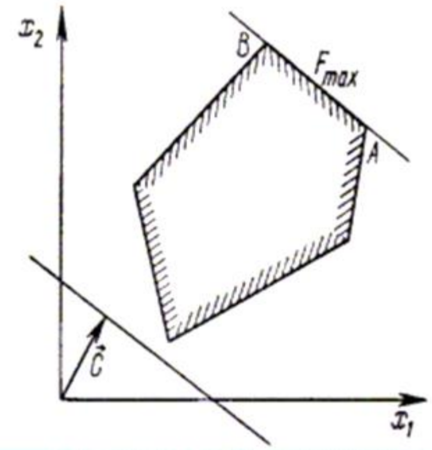
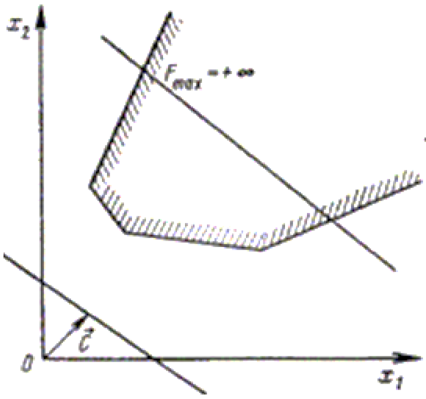


Рис.2

На рис. 3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 4 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.



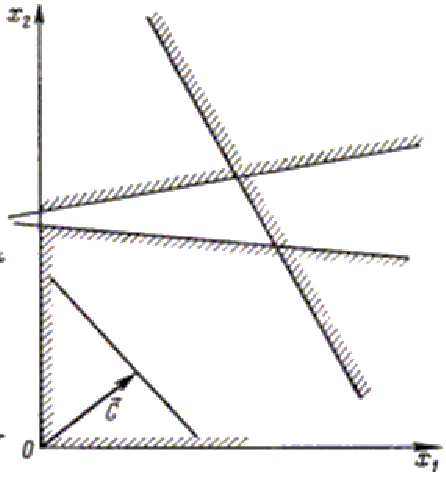


Рис.3 Рис.4

Алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом:

1. Строятся граничные прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.3.2) и (1.3.3) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор

$$grad\ F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2) = \vec{c},$$

5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = k$, проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = k$ в направлении (противоположном) вектора $\vec{c}$, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо устанавливают неограниченность сверху (снизу) функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума (минимума) функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Задача. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 1. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Табл. 1

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий да *A* и x_2 изделий вида *B*. Так как производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12\,x_1 + 4\,x_2 \le 300, \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 \le 120\,, \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит $F = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 30 x_1 + 40 x_2$.

Таким образом записана математическая модель задачи: найти максимум целевой функции $F = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 30 x_1 + 40 x_2$ при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} 12 x_1 + 4 x_2 \leq 300, \\ 4 x_1 + 4 x_2 \leq 120, \\ 3 x_1 + 12 x_2 \leq 252, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Решим задачу геометрическим методом. Для определения многоугольника решений находим область решений неравенств, входящих в систему ограничений. Для этого во всех неравенствах в системе ограничений знаки неравенств заменим на знаки точных равенств. Найдем соответствующие прямые и построим их графики. Как было сказано выше, каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости, если координаты произвольной точки одной полуплоскости удовлетворяют данному неравенству, то полуплоскость является искомой, то есть решением данного неравенства, в противном случае – другая полуплоскость.

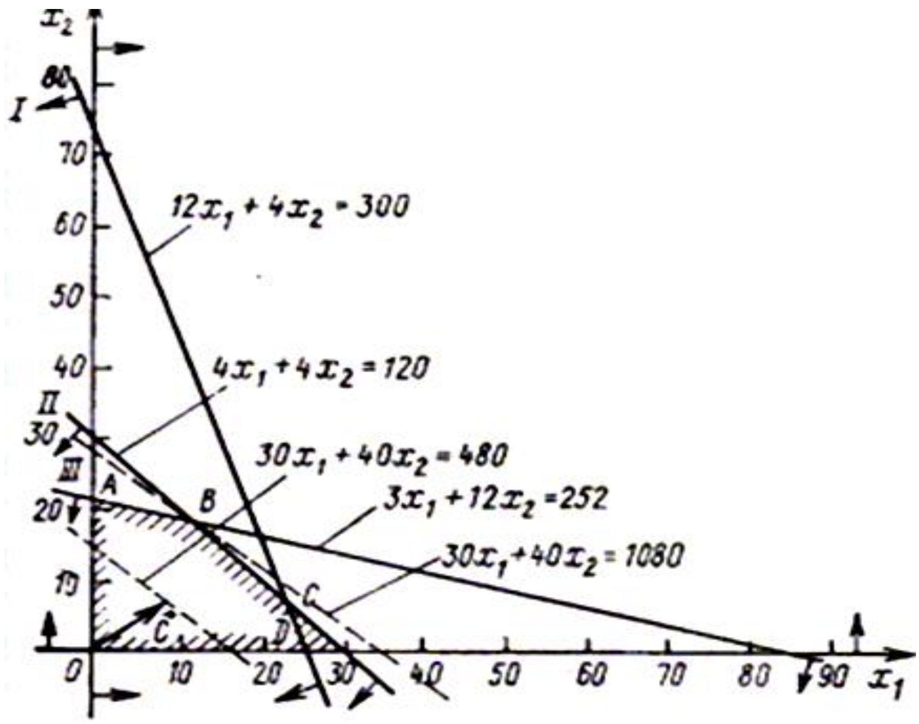


Рис. 5

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12\,x_1 + 4\,x_2 \leq 300$. Для этого, построив прямую $12\,x_1 + 4\,x_2 = 300$ (на рис. 5 эта прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей. Например, точку $O(0;\ 0)$. Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$ значит, полуплоскость, которой принадлежит точка $O(0;\ 0)$, определяется неравенством $12\,x_1 + 4\,x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 5.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 5, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция F принимает максимальное значение.

Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{c} = (30{,}40)$ и мую $30\,x_1 + 40\,x_2 = k$ где k – некоторая постоянная такая, что мая $30\,x_1 + 40\,x_2 = k$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $k = 480$ и построим прямую $30\,x_1 + 40\,x_2 = 480$ (рис. 5).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая k равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *A* и *B*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую$30\,x_1 + 40\,x_2 = 480$ в направлении вектора $\vec{c}$ видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка *B*. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации является максимальной. Найдем координаты точки *B* как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых
$$\begin{cases} 4\,x_1 + 4\,x_2 = 120\,, \\ 3\,x_1 + 12\,x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 12, x_2^* = 18$.

Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида *A* и 18 изделий вида *B*, то оно получит максимальную прибыль, равную

$$F_{max} = 30 \cdot 12 + 40\,18 = 1080\text{руб.}$$

Задача 2.

На предприятии организуется побочный цех для использования остающихся от основного производства материалов. Цех может освоить выпуск продукции 2-х видов: столы, книжные шкафы. Необходимо запланировать ежемесячный выпуск продукции, обеспечив при этом максимально возможную сумму прибыли. Исходные числовые данные приведены в таблице.

Вид продукции	Нормы затрат на ед. продукции			Прибыль за ед. продукции (тыс. руб.)
	Рабочего времени (чел. час)	Древесины (м2)	Стекла (м2)	
Стол	9,2	0,3	-	3
Шкаф	4,0	0,6	2,0	2
Объем ресурсов (в месяц)	520	24	40	-

Решите задачу графическим методом.

1.3.2 Симплекс- метод

В общем случае задачу линейного программирования геометрическим методом решить нельзя. Универсальным методом решения любой задачи линейного программирования, записанной в каноническом виде является *симплекс-метод.*

Любую задачу линейного программирования можно привести к канонической, заданной в предпочтительном виде, при этом решения обеих задач будут эквиваленты. Существует теорема доказывающая эквивалентность этих решений.

Симплексный метод, (метод последовательного улучшения плана) – метод нахождения угловой точки многогранника плана в которой функция цели достигает наилучшего значения $(\min, \max)$.

Чтобы применить симплекс-метод к решению задачи линейного программирования нужно ЗЛП привести к каноническому виду с предпочтительными ограничениями- уравнениями.

Ограничение (равенство) ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при $(b_i \geq 0)$ неотрицательности правой части левая часть содержит переменную входящую в нее с коэффициентом единица, а в остальные с коэффициентом нуль. Сама переменная при этом называется предпочтительной.

Если каждое ограничение-равенство ЗЛП заданной в каноническом виде является предпочтительной, то говорят, что система ограничений представлена в предпочтительном виде**.**

ЗЛП не являющуюся канонической можно привести к каноническому виду. Для этого используются следующие правила:

1) минимизация целевой функции F равносильна максимизации целевой функции $(-F)$. Так, если целевая функция исходной задачи исследуется на минимум, т.е. $F \to \ min,$ то можно рассмотреть функцию с противоположным знаком, которая будет стремиться к максимуму:

$$-F \to max;$$

2) ограничения-неравенства вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

преобразуются в ограничения-равенства путем прибавления к левым частям *дополнительных* (*балансовых*) неотрицательных переменных

$$x_{n+i} \geq 0:$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m_1} \ ;$$

3) ограничения-неравенства вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

преобразуются в ограничения-равенства путем вычитания от левых частей дополнительных неотрицательных переменных

$$x_{n+i} \geq 0:$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}$$

4) дополнительные переменные в целевую функцию вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+i} = 0, i = \overline{1, m_2};$$

5) переменные любого знака заменяются разностью двух других неотрицательных переменных:

$$x_j = x_j' - x_j'', \text{где } \ x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0.$$

Рассмотрим общую задачу линейного программирования, когда максимизируют целевую функцию и для ее решения применим симплекс-метод и М-метод.

Алгоритм симплекс-метода и М-метод

1. Нахождение начального опорного плана;

2. Построение симплекс-таблиц;

3. Применение признака оптимальности опорного плана;

4. Переход к не худшему опорному плану, если предыдущий не является оптимальным.

Применим симплекс-метод и М-метод к общей задаче линейного программирования с пятью неизвестными, имеющей четыре ограничения, математическая модель которой задается соотношениями (1.3.4) -(1.3.6).

Пусть требуется максимизировать линейную функцию (1.3.4)

$$F \ = c_1\, x_1 + \ c_2\, x_2 \ + c_3\, x_3 + c_4\, x_4 \ + \ c_5\, x_5 \rightarrow max, \qquad 1.3.4)$$

С системой ограничений (1.2.7) - (1.2.8)

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \; a_{12}\,x_2 \; + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 \; + \; a_{15}\,x_5 \; \le -b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \; a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 \; + \; a_{25}\,x_5 \; \le b_2 \\ a_{31}\,x_1 + \; a_{32}\,x_2 \; + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4 \; + \; a_{35}\,x_5 \; = \; b_3 \\ a_{41}\,x_1 + \; a_{42}\,x_2 \; + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4 \; + \; a_{45}\,x_5 \ge b_4 \end{cases} \qquad (1.3.5)$$

$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1{,}4}), x_5$ произвольная; $b_1 > 0, b_i \ge 0 \;\; i = ,2,3,4,5.$ (1.3.6)

Применим алгоритм симплекс-метода.

Первый этап - построение начального опорного плана разобьем на два шага:

1.1-*подготовительный:* приведение общей задачи линейного программирования к канонической задаче в предпочтительном виде;

1.2- построение начального опорного плана.

1.1-подготовительный.

1. На переменную x_5 не наложено условие неотрицательности, поэтому представим ее как разность дополнительных неотрицательных ных $x_5 = x_5' - x_5''$, где $x_5' \ge 0, x_5'' \ge 0$. После замены переменной x_5 задача примет вид:

$$F \; = c_1\,x_1 + \; c_2\,x_2 \; + c_3\,x_3 + c_4\,x_4 \; + \; c_5\,(x_5' - x_5'') \to max,$$

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \; a_{12}\,x_2 \; + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 \; + \; a_{15}\,(x_5' - x_5'') \; \le -b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \; a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 \; + \; a_{25}\,(x_5' - x_5'') \; \le b_2 \\ a_{31}\,x_1 + \; a_{32}\,x_2 \; + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4 \; + \; a_{35}\,(x_5' - x_5'') \; = \; b_3 \\ a_{41}\,x_1 + \; a_{42}\,x_2 \; + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4 \; + \; a_{45}\,(x_5' - x_5'') \ge b_4 \end{cases} \qquad (1.3.7)$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1{,}4}), ; x_5' \ge 0; x_5'' \ge 0; \; b_1 > 0, b_i \ge 0 \;\; i = ,2,3,4,5.$$

2. Для приведения задачи к каноническому виду систему ограничений (1.2.9) преобразуем в уравнения. В правую часть неравенств со знаком «≤» прибавим новые неотрицательные переменные с коэффициентом единица, а из правой части неравенств со знаком «≥» отнимем новые неотрицательные переменные с коэффициентом единица. Система (1.2.9) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + \; a_{12}\,x_2 \; + a_{13}\,x_3 + a_{14}\,x_4 \; + \; a_{15}\,(x_5' - x_5'') + x_6 = -b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \; a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + a_{24}\,x_4 \; + \; a_{25}\,(x_5' - x_5'') \; + x_7 = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + \; a_{32}\,x_2 \; + a_{33}\,x_3 + a_{34}\,x_4 \; + \; a_{35}\,(x_5' - x_5'') \qquad = \; b_3 \\ a_{41}\,x_1 + \; a_{42}\,x_2 \; + a_{43}\,x_3 + a_{44}\,x_4 \; + \; a_{45}\,(x_5' - x_5'') - x_8 = b_4 \end{cases}$$

Новые переменные x_6, x_7, x_8 в целевую функцию войдут с коэффициентом нуль.

3. Приведем систему уравнений к предпочтительному (допустимому) виду, для этого первое уравнение умножим на (-1), так как правая часть отрицательна. Только второе уравнение содержит предпочтительную переменную x_7, т.е. только второе уравнение является предпочтительной.

Чтобы остальные уравнения стали предпочтительными в их левые части добавим неотрицательные искусственные переменные w_1, w_2, w_3 со знаком «+» и с коэффициентом единица. Новые искусственные ные w_1, w_2, w_3 введем в целевую функцию F с одним и тем же коэффициентом – M, число Mсчитается очень большим и играет роль штрафа за введенные искусственные переменные.

В данной задаче w_1, w_2, w_3- искусственные, поэтому задача называется M- задачей.

$$\begin{gathered} F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5' - c_5 x_5'' + \\ +0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 - Mw_1 - Mw_2 - Mw_3 = \\ = \sum_{j=1}^{4} c_j x_j + \sum_{i=1}^{3} x_{5+i} \cdot 0 - \sum_{j=1}^{3} Mw_j \to max, \end{gathered} \tag{1.3.8}$$

$$\begin{cases} -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4 - a_{15} x_5' + a_{15} x_5'' - x_6 + w_1 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5' - a_{25} x_5'' + x_7 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_{35} x_5' - a_{35} x_5'' + w_2 = b_3 \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 + a_{45} x_5' - a_{45} x_5'' - x_8 + w_3 = b_4 \end{cases} \tag{1.3.9}$$

$$\begin{gathered} x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}),; x_5' \geq 0; x_5'' \geq 0; \ b_1 > 0, b_i \geq 0 \ \ i = ,2,3,4,5 \\ x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0; w_1 \geq 0; w_2 \geq 0; w_3 \geq 0; \end{gathered} \tag{1.3.10}$$

Общая задача линейного программирования приведена к каноническому типу (1.3.8) - (1.3.10) заданной в предпочтительном виде.

Если оптимальное решение задачи (1.3.8) - (1.3.10) не содержит искусственных переменных$(w_i = 0)$, то будет оптимальным решением исходной задачи (1.3.4) - (1.3.6), на основании известной теоремы.

1.2- построение начального опорного плана

В задаче (1.3.8) - (1.3.10) переменные x_7, w_1, w_2, w_3- предпочтительные и линейно независимы, поэтому являются базисными, а все остальные переменные $x_j, j = 1,2,3,4,6,8, x_5', x_5''$ являются свободными.

Для получения базисного решения приравниваем свободные переменные к нулю, тогда базисные переменные принимают значения: $w_1 = b_1, x_7 = b_2, w_2 = b_3, w_3 = b_4$. Начальный опорный план примет вид:

$$\bar{x}_0 = (0,0,\cdots,0, w_1, x_7, w_2, w_3).$$

Ему соответствует значение целевой функции, равное

$$F_0 = -Mw_1 - Mw_2 - Mw_3.$$

Выразив базисные переменные через свободные, подставив их в целевую функцию, сделав преобразования для нашего случая получим:

$$\begin{aligned}
w_1 &= b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5' - a_{15}x_5'' + x_6\\
x_7 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5' + a_{25}x_5''\\
w_2 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5' + a_{35}x_5''\\
w_3 &= b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 - a_{45}x_5' + a_{45}x_5'' + x_8
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5' - c_5x_5'' -\\
-M(b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5' - a_{15}x_5'' + x_6) +\\
+0 \cdot (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5' + a_{25}x_5'') -\\
-M(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5' + a_{35}x_5'') -\\
-M(b_4 - a_{41}x_1 - a_{42}x_2 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 - a_{45}x_5' + a_{45}x_5'' + x_8) =\\
= -(Mb_1 + 0 \cdot b_2 + Mb_3 + Mb_4) -\\
-(Ma_{11} + 0 \cdot a_{21} - Ma_{31} - Ma_{41} - c_1)x_1 -\\
-(Ma_{12} + 0 \cdot a_{22} - Ma_{32} - Ma_{42} - c_2)x_2 -\\
-(Ma_{13} + 0 \cdot a_{23} - Ma_{33} - Ma_{43} - c_3)x_3 -\\
-(Ma_{14} + 0 \cdot a_{24} - Ma_{34} - Ma_{44} - c_4)x_4 -\\
-(Ma_{15} - 0 \cdot a_{25} - Ma_{35} - Ma_{45} - c_5)x_5' -\\
-(-Ma_{15} - 0 \cdot a_{25} + Ma_{35} + Ma_{45} + c_5)x_5'' -\\
-(M \cdot 1 + 0 \cdot 0 + M \cdot 0 + M \cdot 0)x_6 -\\
-(M \cdot 0 + 0 \cdot 0 + M \cdot 0 + M \cdot 1)x_8.
\end{gathered}$$

Введем обозначения:

$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 = c_5, c_7 = 0, c_8 = 0, c_9 = 0, \\ c_{10} = -M, c_{11} = -M, c_{12} = -M, \end{pmatrix}$ - вектор коэффициентов при переменных в целевой функции;

$\overline{\boldsymbol{C}}_Б = (0, -M, -M, -M)$-вектор коэффициентов при базисных переменных в целевой функции;

$$\overline{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix}$$

-вектор столбец коэффициентов при переменных $x_j, j = \overline{1;12}$; $\overline{\mathbf{A}}_{\mathbf{0}}$- вектор-столбец свободных членов.

$\Delta_j = -M \cdot\ a_{1j}\ + 0 \cdot\ a_{2j}\ - Ma_{3j} - M\ a_{4j} - c_j =, j = 1,2, \cdots ,12$- числа оценки свободных переменных.

Коротко эти формулы можно записать:

$$\Delta_0 = F(\bar{x}_0) = \bar{C}_Б \bar{A}_0;\ \Delta_j = \bar{C}_Б \bar{A}_j - c_j$$

$$\bar{C}_Б = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_5, 0,0,0, -M, -M, -M);$$

$\overline{\mathrm{A}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix} -$ -вектор столбец коэффициентов при переменных x_j; $j = \overline{1;12}$; $\overline{\mathrm{A}}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$- вектор-столбец свободных членов.

$$\Delta_0 = F(\bar{x}_0) = c_1 \cdot\ 0 +\ c_2 \cdot\ 0\ +\ c_3\ \cdot\ 0 + c_3 \cdot\ 0 +\ c_5\ \cdot\ 0 - c_5 \cdot\ 0 +$$

$$+0 \cdot\ 0 +\ 0\ \cdot x_7\ + 0 \cdot\ 0\ - Mw_1 - Mw_2 - Mw_3 = -\sum_{j=1}^{3} Mw_j$$

I. Построение первой симплекс-таблицы

Определим размеры таблицы:

а) количество строк на три больше чем количество уравнений, следовательно, их будет $4 + 3 = 7$;

б) количество столбцов совпадает с числом переменных (после приведения ЗЛП к каноническому типу приведенного вида), их 12 плюс 4 =16.

Таблица получается размерности 7×16.

Заполним шапку таблицы

1) В первой строке в первые три столбца соответственно записываются: $\bar{C}_{Б}$, БП, $\overline{\mathrm{A}}_0$, в последний оценочный столбец записываем Q.

2) Первая строка, начиная с четвертого столбца по 15-ый разделяется на две строки, поэтому количество строк для первых трех и последнего столбца будет равняться 6-ти, а для остальных 7-ми. В верхней новой строке записываются коэффициенты при переменных в целевой функции, а во второй записываются переменные, входящие в систему ограничений записанной в допустимом виде.

3) В 1-ый столбец $\bar{C}_{Б}$, записываются коэффициенты при базисных переменных в целевой функции.

4) Во 2-ой столбец БП заносятся базисные переменные, номер строки в столбце БПсовпадает с номером ограничения, в котором базисная переменная находится.

5) В 3-ий столбец $\overline{\mathrm{A}}_0$ записываются правые части уравнений- свободные члены.

6) Заполняются столбцы всех имеющихся переменных, то есть в столбец, соответствующий данной переменной записываются ее коэффициенты из левой части системы уравнений, записанных в предпочтительном (допустимом) виде.

7) заполняем последнюю строку: в последнюю ячейку столбца $\overline{\mathrm{A}}_0$ заносим значение целевой функции для начального опорного плана $\Delta_0 = F_0 = \bar{C}_{Б}\bar{A}_0 = -(Mb_1 + 0 \cdot b_2 + Mb_3 + Mb_4) = -Mw_1 - Mw_2 - Mw_3$;

Находим все оценки Δ_j опорного плана для каждой переменной и заносим в соответствующие ячейки в последней оценочной строке формулы (1.3.11):

$\Delta_1 = \bar{C}_{Б}\bar{A}_1 - c_1 = (Ma_{11} + 0 \cdot a_{21} - Ma_{31} - Ma_{41} - c_1) = \alpha_1 M - c_1$

$\Delta_2 = \bar{C}_{Б}\bar{A}_2 - c_2 = Ma_{12} + 0 \cdot a_{22} - Ma_{32} - Ma_{42} - c_2 = \alpha_2 M - c_2$

$\Delta_3 = \bar{C}_{Б}\bar{A}_3 - c_3 = Ma_{13} + 0 \cdot a_{23} - Ma_{33} - Ma_{43} - c_3 = \alpha_3 M - c_3$

$\Delta_4 = \bar{C}_{Б}\bar{A}_4 - c_4 = Ma_{14} + 0 \cdot a_{24} - Ma_{34} - Ma_{44} - c_4 = \alpha_4 M - c_4$

$\Delta_5 = \bar{C}_Б \bar{A}_5 - c_5' = Ma_{15} - 0 \cdot a_{25} - Ma_{35} - Ma_{45} - c_5' = \alpha_5 M - c_5$

$\Delta_6 = \bar{C}_Б \bar{A}_6 - c_5'' = -M(a_{15} - a_{35} - a_{45}) - c_5'' = \alpha_6 M - c_5 \quad (1.3.11)$

$\Delta_7 = \bar{C}_Б \bar{A}_7 - c_7 = (M \cdot 1 + 0 \cdot 0 + M \cdot 0 + M \cdot 0) - 0 = M$

$\Delta_8 = \bar{C}_Б \bar{A}_8 - c_8 = (-M \cdot 0 + 0 \cdot 1 + M \cdot 0 - M \cdot 0) - 0 = 0$

$\Delta_9 = \bar{C}_Б \bar{A}_9 - c_9 = \big(-M \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 0 - M \cdot (-1)\big) - 0 = M$

$\Delta_{10} = \bar{C}_Б \bar{A}_{10} - c_{10} = (-M \cdot 1 + 0 \cdot 0 - M \cdot 0 - M \cdot 0) - (-M) = 0$

$\Delta_{11} = \bar{C}_Б \bar{A}_{11} - c_{11} = (-M \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 1 - M \cdot 0) - (-M) = 0$

$\Delta_{12} = \bar{C}_Б \bar{A}_{12} - c_{12} = (-M \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 0 - M \cdot 1) - (-M) = 0$

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5; \alpha_6$- некоторые числа.

Получаем Таблицу1.

Таб.1

$\bar{C}_Б$	БП	$\bar{A}_0$	c_1	c_2	c_3	c_4	$c_5' = c_5$	$c_5'' = c_5$	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5'	x_5''	x_6	x_7	x_8	w_1	w_2	w_3	
$-M$	w_1	b_1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-a_{13}$	$-a_{14}$	$-a_{15}$	a_{15}	-1	0	0	1	0	0	
0	x_7	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$-a_{25}$	0	1	0	0	0	0	
$-M$	w_2	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$-a_{35}$	0	0	0	0	1	0	
$-M$	w_3	b_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$-a_{45}$	0	0	-1	0	0	1	
F		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	0	Δ_9	0	0	0	

Теорема. Если исходная задача решается на максимум и для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_j (j = \overline{1,n})$ неотрицательны, то такой план оптимален.

На основе этой теоремы перейдем ко второму этапу.

II. Переход к не худшему опорному плану

1. Последнюю оценочную строку исследуем на наличие в ней отрицательных оценок (чисел) Δ_j. Возможны два случая:

а) все $\Delta_j \geq 0$, то есть отрицательных чисел нет и в решении отсутствует число M, то опорный план $\bar{x}_0$ оптимален в этой точке функция достигает максимума, и задача решена.

б) среди Δ_j есть отрицательные, то значение функции можно улучшить.

В оценочной строке из чисел $\Delta_j < 0$ (Δ_0 не расматривается) выбирается больший по модулю, его выделяем и столбец в котором он находится становится разрешающим. Пусть это будет столбец Δ_2 обозначим его Δ_{2_0}.

Разрешающий столбец исследуется на наличие в нем строго положительных чисел. Возможны два случая:

1) Таких чисел нет, тогда:

а) если в значении целевой функции F для данного опорного плана присутствует число M, то данная ЗЛП не имеет оптимальных решений, так как ее множество решений пусто;

б) Если же в ней число M отсутствует, то данная ЗЛП не имеет оптимальных решений из-за того, что целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений

2) Такие числа есть, тогда:

а) если в разрешающем столбце имеется только одно положительное число, то его называют разрешающим элементом и выделяют;

б) если в разрешающем столбце присутствует несколько положительных чисел, то заполняется оценочный столбец Q:

1. В оценочном столбце напротив нулевых и отрицательных элементов разрешающего столбца ставятся прочерки;

2. Для заполнения остальных клеток оценочного столбца используется формула:

$$\frac{b_i}{a_{ij_0}}, \text{для нашего случая } a_{ij_0} = a_{i2_0}, i = \overline{1{,}4}; \frac{b_i}{a_{i2_0}}.$$

Из чисел $\left\{ \frac{b_1}{a_{12_0}}; \frac{b_2}{a_{22_0}}; \frac{b_3}{a_{32_0}}; \frac{b_4}{a_{42_0}} \right\}$ выбирается наименьший. Пусть это будет $\frac{b_3}{a_{32_0}} = \delta_0$. Строка, содержащая $\boldsymbol{\delta_0}$ называется разрешающей строкой; коэффициент $\boldsymbol{a_{32_0}}$ который стоит на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки называется разрешающим элементом**,** обозначим его $\boldsymbol{a_{3_02_0}} = a_0$. Таблица 1 примет вид:

Таб.1

$\bar{C}_Б$	БП	$\bar{A}_0$	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5'	c_5''	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	Q
			x_1	x_{2_0}	x_3	x_4	x_5'	x_5''	x_6	x_7	x_8	w_1	w_2	w_3	
$-M$	w_1	b_1	$-a_{11}$	$-a_{12_0}$	$-a_{13}$	$-a_{14}$	$-a_{15}$	a_{15}	-1	0	0	1	0	0	$\frac{b_1}{a_{12_0}}$

0	x_7	b_2	a_{21}	a_{22_0}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$-a_{25}$	0	1	0	0	0	0	$\frac{b_2}{a_{22_0}}$
$-M$	w_2	b_3	a_{31}	a_0	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$-a_{35}$	0	0	0	0	1	0	δ_0
$-M$	w_3	b_4	a_{41}	a_{42_0}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$-a_{45}$	0	0	-1	0	0	1	$\frac{b_4}{a_{42_0}}$
F		Δ_0	Δ_1	Δ_{2_0}	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	M	0	M	0	0	0	

II. После нахождения разрешающего элемента строится следующая симплекс- таблица.

1. Начиная со второй симплекс таблицы столбец $\bar{C}_Б$ и строка над переменными убираются, их заполнять не нужно.

2. В столбце базисных переменных w_2заменяется $x_{2_0} = x_2$. Все остальные элементы столбца БП переносятся без изменений и столбец примет вид:

w_1
x_7
x_2
w_3

3. Все элементы разрешающей строки в таблице1, кроме δ_0, делятся на разрешающий элемент a_0 и заносятся в строку новой таблицы 2 соответствующей разрешающей строке таблицы1.

4. Во все пустые клетки столбца новой таблицы, соответствующему разрешающему столбцу таблицы1записываются нули.

5. Все остальные пустые клетки, включая ячейки столбца $\bar{A}_0$и оценочной строки, заполняются по правилу прямоугольника формулы (1.3.12) - (1.3.13):

$$b_i' = \frac{b_i a_{i_0 j_0} - b_{i_0} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} = b_i - \frac{b_{i_0} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}}$$

$$a_{ij}' = \frac{a_{ij} a_{i_0 j_0} - a_{i_0 j} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j} a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \qquad (1.3.12)$$

$$(i \neq i_0, j \neq j_0)$$

$$\Delta_j' = \frac{\Delta_j a_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} = \Delta_j - \frac{\Delta_{j_0} a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}$$

$$\Delta_0' = \frac{\Delta_0 a_{i_0 j_0} - \Delta_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \Delta_0 - \frac{\Delta_{j_0} b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \qquad (1.3.13)$$

$$(i \neq i_0, j \neq j_0)$$

Формулы (1.3.12) используются для заполнения ячеек столбца $\overline{\mathrm{A}}_0$ и всех свободных ячеек кроме оценочной строки. Ячейки оценочной строки заполняются при помощи формул(1.3.13).

Чтобы заполнить таблицу 2:

1) Все элементы разрешающей строки разделим на разрешающий элементa_0, w_2 заменим наx_2, получим:

x_2	$\frac{b_3}{a_0}$	$\frac{a_{31}}{a_0}$	$\frac{a_0}{a_0}$	$\frac{a_{33}}{a_0}$	$\frac{a_{34}}{a_0}$	$\frac{a_{35}}{a_0}$	$\frac{-a_{35}}{a_0}$	0	0	0	0	$\frac{1}{a_0}$	0

Для простоты введем обозначения:

$$\frac{b_3}{a_0} = b_3', a_{32}' = \frac{a_0}{a_0} = 1, a_{33}' = \frac{a_{33}}{a_0}, a_{34}' = \frac{a_{34}}{a_0}, a_{35}' = \frac{a_{35}}{a_0}, a_{36}' = \frac{-a_{35}}{a_0}, a_{37}' = 0,$$

$$a_{38}' = 0, a_{39}' = 0, a_{310}' = 0, a_{311}' = \frac{1}{a_0} \; a_{312}' = 0$$

Во все ячейки в разрешающем столбце, кроме ячейки, содержащей единицу, запишем нули.

Используя формулы (1.2.14) найдем элементы новой симплекс-таблицы 2 (кроме элементов оценочной строки).

$$b_1' = \frac{b_1 a_0 - b_3(-a_{12_0})}{a_0} = b_1 + \frac{b_3 a_{12_0}}{a_0}; b_2' = \frac{b_2 a_0 - b_3 a_{22_0}}{a_0} = b_2 - \frac{b_3 a_{12_0}}{a_0};$$

$$b_4' = \frac{b_4 a_0 - b_3 a_{42_0}}{a_0} = b_4 - \frac{b_3 a_{42_0}}{a_0}$$

$$a'_{11} = \frac{(-a_{11})a_0 - a_{31}\left(-a_{12_0}\right)}{a_0} = -a_{11} + \frac{a_{i_0j}a_{ij_0}}{a_0}$$

$$a'_{21} = \frac{a_{21}a_0 - a_{31}a_{22_0}}{a_0} = a_{21} - \frac{a_{31}a_{22_0}}{a_0};$$

$$a'_{41} = \frac{a_{41}a_0 - a_{31}a_{42_0}}{a_0} = a_{41} - \frac{a_{31}a_{42_0}}{a_0};$$

$$a'_{12} = a'_{22} = a'_{42} = 0; a'_{32_0} = 1;$$

$$a'_{13} = \frac{(-a_{13})a_0 - a_{33}\left(-a_{12_0}\right)}{a_0} = -a_{13} + \frac{a_{33}a_{12_0}}{a_0};$$

$$a'_{23} = \frac{a_{23}a_0 - a_{33}a_{22_0}}{a_0} = a_{23} - \frac{a_{33}a_{22_0}}{a_0}; a'_{33} = \frac{a_{33}}{a_0};$$

$$a'_{43} = \frac{a_{43}a_0 - a_{33}a_{42_0}}{a_0} = a_{43} - \frac{a_{33}a_{42_0}}{a_0}$$

$$(i \neq i_0, j \neq j_0)$$

По этим же формулам вычисляются элементы остальных ячеек.

Используя формулы (1.3.13) найдем элементы оценочной строки:

$$\Delta'_0 = \frac{\Delta_0 a_{32_0} - \Delta_{2_0} b_3}{a_{32_0}} = \Delta_0 - \frac{\Delta_{2_0} b_3}{a_{32_0}}$$

$$\Delta'_1 = \frac{\Delta_1 a_0 - \Delta_{2_0} a_{31}}{a_0} = \alpha_1 M - c_1 - \frac{(\alpha_2 M - c_2)a_{31}}{a_0}; \Delta'_{2_0} = 0$$

$$\Delta'_3 = \frac{\Delta_3 a_0 - \Delta_{2_0} a_{33}}{a_0} = \alpha_3 M - c_3 - \frac{(\alpha_2 M - c_2)a_{33}}{a_0};$$

$$\Delta'_4 = \frac{\Delta_4 a_0 - \Delta_{2_0} a_{34}}{a_0} = \alpha_4 M - c_4 - \frac{(\alpha_2 M - c_2)a_{34}}{a_0};$$

$$\Delta'_5 = \frac{\Delta_5 a_0 - \Delta_{2_0} a_{35}}{a_0} = \alpha_5 M - c_5 - \frac{(\alpha_2 M - c_2)a_{35}}{a_0};$$

$$\Delta'_6 = \frac{\Delta_6 a_0 - \Delta_{2_0}(-a_{35})}{a_0} = \alpha_6 M - c_5 + \frac{(\alpha_2 M - c_2)a_{35}}{a_0};$$

$$\Delta'_7 = \frac{\Delta_7 a_0 - \Delta_{2_0} \cdot 0}{a_0} = M; \Delta'_8 = 0; \Delta'_9 = \frac{\Delta_9 a_0 - \Delta_{2_0} \cdot 0}{a_0} = M;$$

$$\Delta'_{10} = 0; \Delta'_{11} = \frac{\Delta_{12} a_0 - \Delta_{2_0} \cdot 1}{a_0} = 0 + \frac{\Delta_{2_0}}{a_0}; \Delta'_{12} = 0;$$

$$(i \neq i_0, j \neq j_0)$$

Таб.2

БП	$\overline{\mathrm{A}}_0$	x_1	x_{2_0}	x_3	x_4	x_5'	x_5''	x_6	x_7	x_8	w_1	w_2	w_3	Q
w_1	b_1'	a_{11}'	0	a_{13}'	a_{14}'	a_{15}'	a_{16}'	a_{17}'	0	0	1	0	0	
x_7	b_2'	a_{21}'	0	a_{23}'	a_{24}'	a_{25}'	a_{26}'	0	1	0	0	0	0	
w_2	$\frac{b_3}{a_0}$	$\frac{a_{31}}{a_0}$	1	$\frac{a_{33}}{a_0}$	$\frac{a_{34}}{a_0}$	$\frac{a_{35}}{a_0}$	$\frac{-a_{35}}{a_0}$	0	0	0	0	$\frac{1}{a_0}$	0	
w_3	b_4'	a_{41}'	0	a_{43}'	a_{44}'	a_{45}'	a_{46}'	0	0	-1	0	0	1	
	Δ_0'	Δ_1'	0	Δ_3'	Δ_4'	Δ_5'	Δ_6'	Δ_7'	0	Δ_9'	0	$\frac{\Delta_{2_0}}{a_0}$	0	

6. К новой симплекс-таблице применяется этап I для установления оптимальности полученного решения.

II. МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Одним из методов исследования экономических процессов являются методы математического моделирования, в частности методы и модели линейного программирования.

Рассмотрим несколько достаточно распространенных моделей, отражающих ту или иную реальную экономическую ситуацию, которые строятся на основе линейного программирования и решаются методами линейного программирования.

2.1 Задача о диете (рационе)

Рассмотрим задачу составления наиболее экономного (т. е. наиболее дешевого) рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям. При этом ассортимент продуктов, содержание в каждом из них питательных веществ и стоимость продуктов известны.

Подобная задача возникает в связи с необходимостью обеспечить питанием большое количество людей, например, в армии, в санатории и т. д.

Перечень доступных различных продуктов считается известным, например, (хлеб, сахар, масло, молоко, картофель и т, д.). Количество имеющихся продуктов обозначим через $\boldsymbol{n}$, а количество питательных веществ через $\boldsymbol{m}$. Сами продукты обозначим буквами $F_1\ ,F_2,\ldots\ldots,F_n$. Характеристики продуктов: витамины, минеральные вещества, жиры, белки, углеводы, калорийность и т. д, обозначим буквами $N_1,\ \ N_2,\ldots,N_m$.

Считается, что для каждого продукта $F_i, i\ =\ 1,2,\ldots,n,$ известно, сколько в одной единице (килограмме, грамме) продукта - содержится указанных компонент. Обозначим их через a_{ij}- содержание j-го питательного вещества в единице массы i-го продукта; через b_j обозначим минимальную (в единицах массы) суточную потребность в -м питательном веществе; через x_i обозначим искомое суточное потребление i-го продукта. Очевидно, что $x_i\ \geq\ 0$.

Составим таблицу-справочник, содержащую характеристики продуктов:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & F_1 & F_2 & \cdots & F_j & \cdots & F_n \\
N_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
N_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
N_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
N_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}
\qquad (*)
$$

Данная таблица называется матрицей питательности A, размерности m на n.

Допустим, что мы составили рацион $\boldsymbol{x} = (x_1 , x_2, \cdots, x_n)$, тогда можно вычислить, по заданной таблице общее содержание j-го питательного вещества в рационе, которое не должно быть меньше минимальной сти b_j. Эти требования можно выразить при помощи вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, i-*я* координата которого b_i указывает минимально необходимое содержание компоненты N_i в рационе.

Так как в x_1 единиц продукта F_1, согласно матрице питательности, содержится $a_{11}x_1$ единиц компоненты N_1, в x_2 единиц продукта F_2 ся $a_{12}\, x_2$ и т.д. и в x_n единиц продукта F_n содержится $a_{1n}\, x_n$, то складывая эти величины получим в каком количестве компонента один присутствует в этом рационе:

$$a_{11}x_1 \ + \ a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}x_n.$$

Это количество не должна быть меньше минимальной потребности b_1. Связь между общим количеством компоненты один и минимальной потребностью b_1можно записать в виде неравенства:

$$a_{11}x_1 \ + \ a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq \ b_1$$

Аналогично можно определить и количества всех остальных веществ N_i в составленном рационе $(x_1 , x_2, \cdots, x_n)$.

Это означает, что координаты x_i вектора x должны удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{11}x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{11}x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Коротко (2.1.1) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad \geq \quad b_i\,, i = \overline{1,m}.$$

В процессе формализации содержательной постановки задачи необходимо указать, что переменные x_1 , $x_2, \cdots, x_n$ неотрицательны. Поэтому к ограничениям (2.1.1) добавляются неравенства

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \qquad (2.1.2)$$

Из содержательной постановки задачи следует, что любой рацион, который может быть предложен в качестве меню на рассматриваемый срок, обязан удовлетворять условиям (2.1.1) и (2.1.2). Но таких рационов может быть бесконечно много. Для того чтобы выбрать какой-то из них, нужно учитывать цены на продукты.

Цены на продукты $F_1, F_2, \ldots, F_n$, равны соответственно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, запишем как вектор $C = [c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]$.

Следовательно, стоимость всего рациона $x = (x_1\,,\, x_2, \cdots, x_n)$, может быть записана в виде

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \text{ или } F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j. \qquad (2.1.3)$$

Математическая формулировка задачи о диете такова: среди всех

ров $\boldsymbol{x} = (x_1\,,\, x_2, \cdots, x_n)$ удовлетворяющих ограничениям (2.1.1), (2.1.2), выбрать такой, для которого выражение (2.1.3) принимает минимальное значение

$$\min F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \geq \quad b_i \,, i = \overline{1,m}. \qquad (2.1.4)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

(2.1.4) - математическая модель задачи выбора рациона.

Для записи математической модели задачи о составлении рациона в матричной форме введем обозначения:

$C = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n]$- цены на продукты $F_1, F_2, \dots, F_n$;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

– матрица элементы a_{ij}, которой показывают сколько единиц компоненты N_j содержится в продукте F_i;

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$- вектор переменных x_i, показывающих сколько единиц продукта F_i нужно взять;

$A_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$- вектор ограничений b_i, указывающих минимально необходимое содержание компоненты N_i в рационе.

Таким образом, задачу о рационе можно записать при помощи модели линейного программирования заданной в симметрической форме:

$$\min F(x) = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n][x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]^T;$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad (2.1.5)$$
$$x_1 \geq 0 \,,\; x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

Эту же задачу можно записать в матрично-векторной форме

$$\begin{gathered} min\, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{cx} \\ \boldsymbol{A}\mathbf{x} \geq \boldsymbol{b},\;\; \mathbf{x} \geq 0 \end{gathered}, \qquad (2.1.5'')$$

где $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \cdots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$,

cx – скалярное произведение векторов

$$\boldsymbol{c} = (c_1;\; c_2;\; \cdots\; c_n) \text{ и } \quad \mathbf{x} = (x_1;\; x_2;\; \cdots\; x_n).$$

На этом процесс формализации содержательной задачи о составлении рациона закончен.

Достаточно реальная задача записана в строгой математической форме, поэтому при ее решении можно применить весь богатый арсенал математических методов.

С другой стороны, в формулах (2.1.1) - (2.1.4) мы уже полностью абстрагировались от содержательного смысла задачи, и если при составлении модели (2.1.4) были упущены некоторые важные с содержательной точки зрения моменты, то получим неверные результаты.

Ясно, например, что модель (2.1.4) отражает не все стороны той реальной задачи, которую она призвана заменить. Так, медицинские ограничения по необходимому количеству компоненты N_i в рационе могут носить и иной характер: это количество не должно превышать заданного.

Правда, следует сказать, что это дополнительное требование нетрудно учесть, и при этом вид задачи (2.1.4) изменится незначительно. Кроме того, можно отметить, что в ограничениях (2.1.1) и при минимизации функции (2.1.3) учтены лишь требования врача и экономиста, в то время как вкусы человека, для которого составляется этот рацион, здесь никак не фигурируют. В модели (2.1.4) не заложено условие, что рацион (диета) должен быть съедобным.

Примером задачи о диете является задача о составлении смесей.

2.2 Задача о составлении смесей

Подобные задачи возникают в ситуациях, когда один или более продуктов получаются путем смешивания некоторого числа компонентов. Можно бесконечным числом способов смешивать различные виды сырья, чтобы получить конечные продукты, удовлетворяющие различным ограничениям. Исходные компоненты смесей обычно в той или иной мере взаимозаменяемы. Важно найти такой набор компонентов смеси, чтобы продукция заданного качества получается с минимальными затратами.

Задача о составлении смесей возникает во многих отраслях промышленности (металлургическая, химическая, нефтеперерабатывающая) при производстве чугуна, стали, красок, бензина и т.д. Большое число компонентов смеси, разнообразие технико-экономических характеристик, которым должна соответствовать смесь - это все делает задачу сложной, но и полезной.

Итак, задача состоит в том, чтобы определить такой ассортимент выпускаемых смесей, при котором имеющиеся компоненты использовались с наибольшей рентабельностью, а готовая продукция строго отвечала бы техническим требованиям.

Запишем математическую модель задачи о составлении смесей.

Минимизировать целевую функцию

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min$$

при условии,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ij} x_i = H_j \ \ (j = 1,2, \cdots m)$$

$$x_i \geq 0,$$

где i- номер исходного материала $(i = 1,2, \cdots n)$;

j- номер химического элемента $(j = 1,2, \cdots m)$;

P_{ij}- содержание в (%) j-го химического элемента в -ом исходном материале;

c_i- цена за единицу каждого -го исходного материала;

H_j- доля в (%) j-го химического элемента в готовом продукте;

x_i- доля -го исходного материала в составе смеси.

Первое ограничение задачи требует, чтобы сумма долей исходных материалов равнялась единице (так как расчет ведется на 1т. смеси). ные m ограничений обуславливают соблюдение заданного химического состава смеси (сплава).

Продукция получается в результате смешивания (сплава) различных видов исходного сырья или материалов. Модель позволяет найти такой набор компонентов смеси, при котором получается продукция заданного качества с минимальными затратами. Рассмотрим построение модели о смесях на конкретном примере.

Пример. Пусть требуется изготовить сплав (припой), содержащий 15% олова, 55% цинка и 30% свинца. Для изготовления используем исходные сплавы, приведенные в таблице:

Сплав / Хим. элемент	№1	№ 2	№3	№ 4	№5	№6	№7	№8
Свинец, %	20	25	15	35	30	15	40	25
Цинк, %	45	35	25	20	30	40	15	20
Олово, %	35	40	60	45	40	45	45	55
Стоимость1кг, руб.	7	3	5	6	10	7	4	6

На основе приведенных данных требуется определить какие исходные сплавы и в каких количествах целесообразно использовать для получения задания сплава металлов, чтобы при этом затраты на приобретение исходных сплавов были минимальными.

Составим математическую модель:

Требуется свести к минимуму целевую функцию

$$Z = \sum_{i=1}^{7} c_i x_i + c_0 = 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 7x_6 + 4x_7 + 6 \to min$$

при условиях:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1 \\ 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 30x_5 + 15x_6 + 40x_7 + 25x_8 = 30 \\ 45x_1 + 35x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 30x_5 + 40x_6 + 15x_7 + 20x_8 = 55 \\ 35x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 45x_4 + 40x_5 + 45x_6 + 45x_7 + 55x_8 = 15 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0. \end{array}\right\}$$

Задача решается одним из методов, примененных для решения предыдущих задач.

2.3 Модель рационального использования посевных площадей

Имеется m земельных угодий $S_1, S_2, \ldots, S_m$, предназначенных для засева той или иной сельскохозяйственной культурой. Эти площади отличаются либо положением, либо характером почвы. На каждом из угодий (полей) S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, могут быть размещены одна или несколько из n сельскохозяйственных культур $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ - (пшеница, рожь, кукуруза, картофель и т.д.).

Пусть известна урожайность культуры - Q_j, на поле S_i она равна a_{ij} центнеров с гектара. Будем обозначать площадь поля S_i в гектарах через a_i. Ограничения в этой задаче таковы: задан план производства b_j каждой сельскохозяйственной культуры Q_j. Известны закупочные цены c_j на каждый вид Q_j продукции.

Требуется определить план засева посевных площадей с целью максимизации дохода от продажи сельскохозяйственной продукции.

Пусть x_{ij} - площадь (в гектарах) на i-м поле, занятая культурой Q_j.

Тогда математическая модель задачи рационального использования посевных площадей такова:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \ \geq b_j,$$

$x_{ij} \geq 0, i \ = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n.$

2.4 Задача составления плана производства

Рассматривается деятельность некоторой производственной единицы (завода, цеха). Требуется составить план производства, обеспечивающий в максимальной степени выполнение задания. Относительно данной производственной единицы известны ее технологические возможности, а также количества сырьевых ресурсов, которые можно использовать.

Пусть число всех видов ресурсов равно m обозначим их $R_1, R_2, \dots, R_m$. Это могут быть: металл, электроэнергия, различные виды поставок с других предприятий. Допустим, что на нашем производстве могут выпускаться n типов товаров $G_1, G_2, \cdots, G_n$.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел $(a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m,$ показывающих, какие количества ресурсов R_i необходимы для выпуска одной единицы товара G_j. Так, производство товара G_1, можно мыслить, как конвейер, на всем протяжении которого подаются ресурсы в количествах $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ \dots, a_{m1}$, а на конце конвейера выходит готовая единица продукта G_1.

Составим технологическую матрицу.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & G_1 & G_2 & \cdots & G_j & \cdots & G_n \\
R_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
R_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
R_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}$$

Технологическая матрица полностью описывает технологические возможности производства. Обозначим ее через *А*.

Пусть заданы количества b_i, ресурсов $R_i,\ i = 1,2,\dots,m,$ которые могут быть использованы в производстве, а $b = (b_1, b_2, \dots, b_m,$ (вектор ресурсов).

Назовем планом производства вектор $x = (x_1\ ,\ x_2, \cdots, x_n),$ показывающий, какие количества товаров $G_1, G_2, \cdots, G_n$ будут произведены.

Будем считать технологию производства линейной, т. е. предположим, что все затраты ресурсов растут прямо пропорционально объему выпуска. Более точно, допустим, что затраты при выпуске x_j единиц продукта G_j описываются вектором $(a_{1j}x_j, a_{2j}x_j, \cdots, a_{mj}x_j)$, причем одновременное функционирование нескольких технологических процессов приводит к суммарным затратам.

Таким образом, затраты ресурсов, необходимые для выполнения плана производства $\boldsymbol{x} = (x_1\ ,\ x_2, \cdots, x_n)$, описываются вектором, координаты которого имеют вид

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{array}$$

или, в матричной форме, вектором Ax. Условие ограниченности ресурсов записывается в виде $Ax \le b$.

Следовательно, при заданном векторе ресурсов b рассматриваемой производственной единицей может быть выпущен любой набор товаров $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий ограничениям $Ax \le b,\ \ x \ge 0$. Как правило, такой вектор $\boldsymbol{x}$ не единствен. В связи с этим появляется возможность выбора наилучшего (в некотором смысле) плана.

Рассмотрим две возможные постановки оптимизационной задачи.

Пусть заданы цены $\boldsymbol{c} = (\mathrm{c}_{\mathbf{1}}, \mathrm{c}_{\mathbf{2}}, \dots, \mathrm{c}_{\boldsymbol{n}})$ на продукты производства $G_1, G_2, \cdots, G_n$.

Требуется определить план производства, максимизирующий стоимость выпущенной продукции. Формальная запись этой задачи такова:

$$\begin{gathered} max\langle c, x\rangle \\ Ax \le b,\ \ x \ge 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Подобная постановка вопроса соответствует принципу планирования «по валу». Тот случай, когда планирование выпуска ведется «по номенклатуре», можно смоделировать иначе.

Пусть задан вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1 , \hat{x}_2, \cdots , \hat{x}_n)$, определяющий один комплект выпуска, а α означает число выпускаемых комплектов. Требуется выпустить как можно больше таких комплектов.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} max\ \alpha \\ Ax \leq b, x \geq \alpha\hat{x},\ x \geq 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь неравенство $x \geq \alpha\hat{x}$ означает, что вектор $x = (x_1 , x_2, \cdots , x_n)$содержит не меньше α полных комплектов $\hat{x} = (\hat{x}_1 , \hat{x}_2, \cdots , \hat{x}_n)$ выпускаемой продукции.

Модели (2.7) и (2.8), хотя несомненно и отражают определенные черты реального производства, являются тем не менее сильно идеализированными. Так, в них отсутствует такое важное для производства понятие, как время.

Считается также, что все необходимые ресурсы $R_i, i = 1, 2, \ldots, m,$ в нужный момент находятся под рукой. Тем самым мы абстрагировались от острых проблем динамики производства и ритмичности поставок. Кроме того, в построенных моделях не учитываются затраты живого труда и целый ряд других показателей, являющихся непременным атрибутом реального производства.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задача о раскрое

Для изготовления брусьев трех длин (0,2; 0,3 и 0,5 м) на распил поступили бревна длиной 1 м. Нужно получить не менее 150 и не более 200 брусьев длиной 0,2 м; не менее 200 и не более 300 брусьев длиной 0,3 м; не менее 300 и не более 330 брусьев длиной 0,5 м. Как распиливать бревна, чтобы обеспечить нужное число брусьев каждого размера и при этом минимизировать отходы?

2. Задача о смеси.

Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката;b_1 тыс. л алкилата; b_2 тыс. л крекинг-бензина; b_3 тыс. л бензина прямой перегонки и b_4 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях получают 3 сорта бензина: бензин А - 2:3:5:2, бензин В - 3:1:2:1 и бензин С - 3:2:1:3. Стоимости одной тысячи литров указанных сортов бензина равны $c_1, c_2,\ c_3$ единиц соответственно. Определить план смешивания компонентов из условия получения максимальной прибыли.

3. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. В таблице указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых комплектуются поезда, и количество пассажирских мест в каждом из вагонов.

Поезд	Вагон				
	багажи.	почт.	жест. плац.	куп.	СВ
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	0	8	4	1
Число пассажиров	0	0	54	36	18
Парк вагонов	12	8	81	70	—

Нужно максимизировать число ежедневно перевозимых пассажиров. Как изменится модель, если пропускная способность дороги такова, что в день по ней могут пройти не более 6 пассажирских поездов?

4. Фирма производит из одного вида сырья два продукта: А и В, продаваемых, соответственно, по 0,08 и 0,15 ед. за упаковку. Рынок сбыта для каждого из продуктов практически не ограничен. Продукт А обрабатывают на машине 1, продукт В - на машине 2. Затем оба продукта упаковывают на фабрике.

Один килограмм сырья стоит 0,06 ед. Машина 1 обрабатывает 5000 кг сырья за один час с потерями 10%. Машина 2 обрабатывает 4000 кг сырья за один час с потерями 20%. Машина 1 доступна 6 ч в день; ее использование стоит 228 ед. в час. Машина 2 доступна 5 ч в день; ее использование обходится 186 ед. в час.

Фабрика может работать 10 часов в день. Один час работы фабрики обходится в 360 ед. За один час можно изготовить 12 000 упаковок продукта А или 8 000 упаковок продукта В. Упаковка продукта А весит 0,25 кг, упаковка продукта В - 0,33 кг. Сколько сырья для производства продуктов А и В нужно закупать ежедневно, чтобы максимизировать прибыль?

5. Авиакомпания должна перевезти 5 000 пассажиров самолетами трех типов. Сколько самолетов каждого типа надо использовать, если для формирования экипажей имеется не более 440 человек, а издержки должны быть минимальными?

Тип самолета	Экипаж, чел.	Число пассажиров	Стоимость эксплуатации, ед.
1	3	38	7 620
2	7	80	11 000
3	4	46	8 500

6. Определить оптимальную производственную программу. Автомобильный завод выпускает машины типов A, B, C, D. Производственные мощности цехов и участков приведены в таблице.

Наименование цехов и участков	Тип машины			
	A	B	C	D
Подготовка производства	125	по	120	115
Кузовной	80	320	200	160
Цех шасси	ПО	110	100	170
Сборочный	160	80	120	100
Участок испытаний	280	70	140	210
Прибыль от выпуска одной машины, ед.	3 100	2 300	1 800	2 500

7. Требуется составить диету, содержащую, по крайней мере, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего составить диету из 5 имеющихся продуктов: хлеба, сои, сушеной рыбы, фруктов, молока? В табл. указаны цены продуктов за 1 кг (или л) в денежных единицах и содержание в продуктах компонентов диеты в усл. ед.

Питательные вещества	Продукты				
	хлеб	СОЯ	сушеная	фрукты	МОЛОКО
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	- 1	8	3	0	4
Витамины	2,	2	4	6	2
Цена	24	75	64	36	10

8.Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидения, радио, газет и афиш. Из различных рекламных экспериментов известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7, 4 денежных ед. в расчете на 1 денежную ед., затраченную на рекламу.

Фирма не может выделить на рекламу более 500000 денежных ед. Кроме того, фирма считает, что следует расходовать не более 40% рекламного бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши, а на радио планируется расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется расходовать на телевидение. Как целесообразнее распределить рекламный бюджет?

9.Требуется рационально организовать работу городского автобусного парка. Собраны данные о потребности в автобусах на одной из линий. Оказалось, что в пределах каждого из следующих друг за другом 4-часовых интервалов требуемое количество автобусов можно считать величиной постоянной. Эти значения указаны в таблице. Продолжительность непрерывной работы автобуса не должна превышать 8 ч в сутки.

Интервал времени, ч	24-04	04-08	08-12	12-16	16-20	20-24

Требуется автобусов	4	8	10	7	12	4

Минимизировать количество автобусов, выходящих на линию в течение суток.

10. Бройлерное хозяйство фабрики насчитывает 20000 цыплят, которых выращивают до 8-недельного возраста, а затем продают. Недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, но можно положить, что в среднем одному цыпленку требуется 500 г корма в сутки.

Кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности, для чего составляются смеси из различных ингредиентов. Для простоты ограничимся тремя составляющими: известняком, зерном и соевыми бобами. Учитываются три вида питательных веществ: кальций, белок, клетчатка. Данные о содержании питательных веществ в ингредиентах приведены в таблице.

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/кг ингредиента)			
	Кальций	Белок	Клетчатка	Стоимость,
Известняк	0,38	0	0	0,08
Зерно	0,001	0,09	0,02	0,30
Соевые бобы	0,002	0,5	0,08	0,80

Получить кормовую смесь минимальной стоимости, удовлетворяющую перечисленным требованиям.

11. Фирма выпускает шляпы двух фасонов. Трудоемкость изготовления шляпы фасона 1 вдвое выше трудоемкости изготовления шляпы фасона 2. Если, бы фирма выпускала только шляпы фасона 1, суточный объем производства составил бы 500 шляп. Суточный объем сбыта шляп обоих фасонов находится в диапазоне от 150 до 200 штук. Прибыль от продажи шляпы фасона 1 равна 8 ед., а шляпы фасона 2 - 5 ед. Фирма хочет максимизировать свою прибыль.

12. Фирма выпускает изделия трех моделей: 1, 2 и 3. Для их изготовления используются два вида ресурсов: А и В, запасы которых составляют 4 000 и 6 000 единиц. Расходы ресурсов на одно изделие каждой модели приведены в таблице. Трудоемкость изготовления изделия модели 1 вдвое больше, чем изделия модели 2, и втрое больше, чем изделия модели 3. Если бы фирма выпускала только изделия модели 1, то ежедневный выпуск составил бы 1 500 штук.

Ресурс	Расход ресурса на одно изделие		
	1	2	3
А	2	3	5
В	4	2	7

Анализ рынка сбыта показал, что ежедневно можно продать не менее чем 200 изделий модели 1,200 изделий модели 2, 150 изделий модели 3. Кроме того, соотношение выпуска изделий моделей 1, 2 и 3 должно быть 3:2:5. Прибыль от реализации одного изделия равна: для модели 1 - 40 ед., для модели 2 - 20 ед., для модели 3 - 30 ед. Требуется максимизир. прибыль.

13. Для изготовления сплава из свинца, цинка и олова используют сырье, представляющее собой пять различных сплавов этих металлов. Содержание **(в** %) свинца и цинка в каждом из сплавов и стоимость 1 кг сплава (денежные единицы) приведены в таблице.

Компоненты	Состав сплава в %				
	1	2	3	4	5
Свинец	7	9	40	52	30
Цинк	11	23	42	24	15
Стоимость	14	12	11	9	11,5

Сколько сплава каждого вида нужно взять, чтобы изготовить с минимальной себестоимостью сплав, содержащий не более 40% олова и не менее

20% свинца? Как изменится модель, если ограничения станут такими: олова - от 40 до 60%; цинка - от 20 до 30%?

14. Под посев 5 культур отведено 3 различных участка земли площадью 35,40, 60 га. В таблице приведены данные о среднем урожае с 1 га каждой культуры на каждом участке, прибыли от продажи одного центнера культуры и минимально необходимом количестве каждой культуры.

Культура	Урожайность на участках, ц/га			Потребности в культуре, ц	Прибыль, ед.
	1	2	3		
1	43	41	50	1 500	15
2	39	43	40	1 300	19
3	60	70	67	2 000	12
4	55	53	50	1 600	14
5	35	34	40	1 100	22

Как обеспечить максимальную выручку?

15. Обработка деталей трех видов производится на трех различных станках. В таблице указаны нормы времени (ч) на обработку станком соответствующей детали, прибыль от продажи одной детали (ед.), стоимость одного часа работы каждого станка (ед.) и предельное время работы каждого станка (ч).

Станок	Нормы времени обработки деталей			Стоимость 1 ч работы	Время работы
	A	B	C		
1	0,2	0,1	0,05	30	40
2	0.6	0.2	0.2	10	60
3	0,2	0,4	0,4	20	30
Прибыль (ед.)	10	16	12	—	—

Далее описаны 15 условий. В каждом случае нужно построить математическую модель, считая, что в условиях 1-10 подразумевается, что любая деталь может производиться на любом из станков, а в случаях

11-15 каждая деталь проходит последовательную обработку на каждом станке.

1. Получить максимум товарной продукции.

2. Максимизировать суммарную прибыль.

3. Минимизировать суммарные затраты времени на обработку, если требуется изготовить 300 деталей А, 500 деталей *В,* 100 деталей С.

4. Изготовить максимум комплектов, состоящих из 3 деталей *А,* 2 деталей *В,* 1 детали С.

5. Максимизировать суммарную прибыль, если задан ассортимент - 3:2:1.

6. Максимизировать суммарную прибыль, если требуется изготовить не менее 200 деталей *А,* 400 деталей *В,* 100 деталей С.

7.Добиться макс. загрузки станков при заданном ассортименте — 3:2:1.

8.Максимизировать суммарное число изготовленных деталей при одинаковом времени работы всех станков.

9.Максимизировать прибыль, если каждый станок загрузить производством только одного вида деталей. Кроме того, нужно изготовить не менее 100 штук деталей каждого вида.

Графическое решение ЗЛП с двумя переменными

Пример 1. Построить допустимую область системы неравенств

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

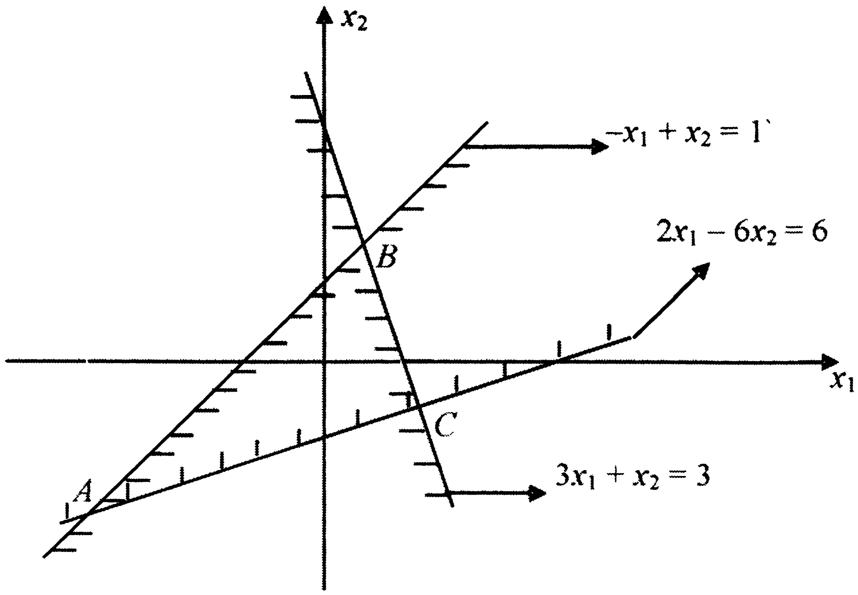


Рис. 1.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти допустимую область системы неравенств в задачах 1-6.

1. $\begin{cases} 0{,}75\,x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_2 \le 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 12; \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 28; \end{cases}$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 3x_2 \ge 12, \end{cases}$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2; \\ 5x_1 + x_2 \le 2; \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 42, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$
$x_1 - x_2 \ge 4.$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10; \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$

Указание. Равенство $x_1 - 2x_3 + x_4 = 4$ преобразовать в неравенство $-2x_3 + x_4 \le 4$, учитывая, что $x_4 \ge 0$. Аналогично преобразовывается второе равенство.

7. Описать систему неравенств по ее допустимой области (рис.3)

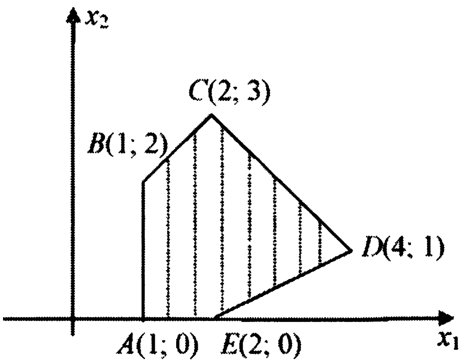


Рис.3

8. Описать систему неравенств по ее допустимой области (рис.4)

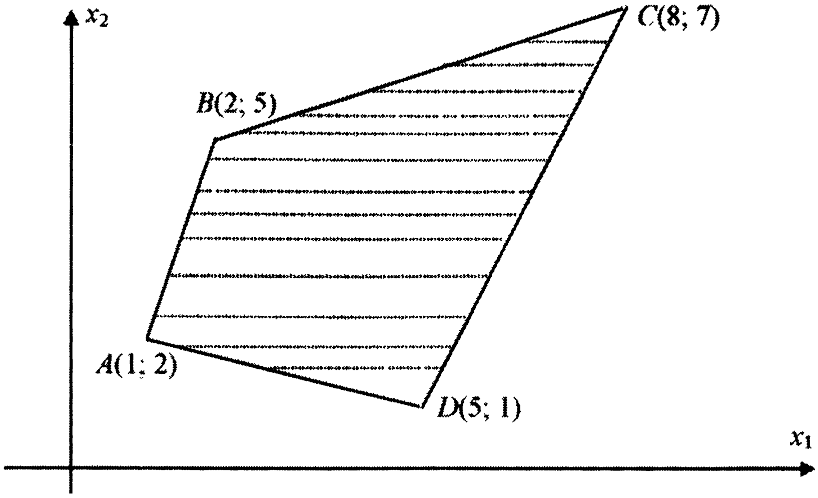


Рис.4

Решить графически следующую ЗЛП: 9 - 26.

9. $F = 2\,x_1 + x_2 \to \max(min)$; 10. $F = 6\,x_1 - 2x_2 \to \max(min)$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2\,x_2 \le 2; \\ x_1 - 3\,x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ 3x_1 - x_2 \le 6; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

11. $F = 4\,x_1 - 4x_2 \to \max(min)$; 12. $F = -2\,x_1 + 2x_2 \to \max(min)$;

$$\begin{cases} 2x_1 + 7\,x_2 \le 21; \\ 7x_1 + 7\,x_2 \le 49; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$$\begin{cases} 3\,x_1 - 2\,x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2\,x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

12. $F = -3\,x_1 + x_2 \to \max(min)$; 14. $F = -3\,x_1 - x_2 \to \max(min)$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6; \\ x_1 - x_2 \le 4; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 1; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ 2x_1 + x_2 \le 3; \\ \alpha x_1 + \beta x_2 \le 6; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

13. $F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max(min)$;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7; \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Рассмотреть случаи: а) $\alpha = \beta = 1$; б) $\alpha = 2, \beta = 3$; в) $\alpha = 6, \beta = -6$.

14. Из стандартных листов фанеры нужно вырезать заготовки трех видов в количестве 24, 31, 18 штук соответственно. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Числа получаемых заготовок при данном способе раскроя одного листа фанеры приведены в таблице, где даны отходы (в усл.ед) для каждого способа раскроя.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.)	
	Способ раскроя 1	Способ раскроя 2
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Величина отходов	12	16

Сколько листов фанеры следует раскроить каждым способом, чтобы минимизировать отходы и получить требуемое количество заготовок?

15. Автозавод выпускает две модели автомобилей: *A* и (более дешевую) *B*. На заводе используется труд 1 000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждый из которых работает по 40 ч в неделю. Для изготовления модели *A* требуется 30 часов неквалифицированного и 50 ч квалифицированного труда. Для изготовления модели *B* требуется 40 ч неквалифицированного и 20 ч квалифицированного труда. Расходы на сырье и комплектующие изделия составляют 3000 условных единиц для модели *A* и 1000 условных единиц для модели *B*. Суммарные расходы не должны превышать 1 800 000 ед. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают 5 дней в неделю и могут отгрузить с завода не более 210 машин в день. Каждая модель *A* приносит 2 000 ед. прибыли, а модель *B* -1 000 ед. Каков оптимальный объем выпуска моделей?

16. Изготавливаются два вида деталей. Заготовки должны пройти последовательную обработку на трех станках. Каждый станок не может работать более 10 ч в сутки. Время обработки и прибыль (условные единицы) от продажи одного изделия указаны в таблице. Каковы оптимальные объемы производства изделий каждого вида?

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Прибыль, ед.
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	4
2	5	20	15	6

17. (задача об использовании ресурсов). Предприятие производит 2 вида продукции Х и У. 1 кг Х приносит прибыль 5 рублей, требует 2 кг ресурса А и 3 кг ресурса В. 1 кг У приносит прибыль 10 рублей, требует 7 кг ресурса А и 9 кг ресурса В. Суммарный запас ресурсов 70 кг (А) и 50 кг (В). При каком объёме производства прибыль будет максимальна?

18. Экономика состоит из 3-ёх отраслей: промышленность, с/х-во, прочие отрасли. Задана матрица коэффициентов прямых затрат ***a*** и вектор конечной продукции **У**:

$$a = \begin{vmatrix} 0,30 & 0,25 & 0,20 \\ 0,15 & 0,12 & 0,03 \\ 0,10 & 0,05 & 0,08 \end{vmatrix} \qquad У = \begin{vmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать объем валовой продукции, межотраслевые потоки, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

19.Фирма располагает 3-мя группами основного оборудования и может выпускать изделия 4-х видов – А, Б, В и Г.Числовые данные приведены в табл.

Группы обо-	Время в минутах на ед. изделия	Месячный

рудования	А	Б	В	Г	фонд времени
I группа	1	2	4	8	24 000
II группа	3	5	1	0	12 000
III группа	6	0	3	1	30 000
Прибыль за ед.изд.(тыс.р.)	0,4	0,2	0,5	0,8	-

Решить задачу симплексным методом и найти максимум прибыли

.

2.5 Задача рационального раскроя промышленных материалов

Одной из простейших и в тоже время актуальных в экономике является задача рационального раскроя промышленных материалов.

Сущность рационального раскроя состоит в том, чтобы разработать и внедрить в производстве такой план раскроя, при котором получается необходимый ассортимент(комплект) заготовок, а отходы (по площади и весу) сводятся к минимуму. Формулировка задачи по оптимальному раскрою материалов зависит от формы раскраиваемого материала (пруток, лист, рулон).

Мы рассмотрим алгоритм для решения задачи на максимум. Для решения задачи на минимум нужно целевую функцию умножить на -1 и решать задачу на максимум.

Сформулируем математически задачу оптимального раскроя рулонного материала.

Примем следующие обозначения:

В - ширина исходного рулона;

i - номер ширины полосы материала, который необходим для производства $(i = 1,2,\cdots m)$;

Δ_i- ширина полосы –i -го вида$(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m)$;

A_i - потребное количество рулонов i–го вида по заказу;

j - варианты раскроя единицы исходного материала на полосы $(j =$

$1,2,\cdots n)$;

b_{ij}- количество заготовок i–го вида получаемое при раскрое единицы исходного материала по j–му варианту;

c_j- отход при раскрое единицы исходного материала по j –му варианту;

x_j- количество единицы исходного материала, которое будет раскраиваться по j–му варианту.

Исходная формула для составления вариантов раскроя следующая:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i P_{ij} + c_j = B; \quad (j = 1,2,\cdots n), 0 \le c_j \le min\{\Delta_i\}, \qquad (2.5.1)$$

где Δ_i — ширина полосы $i, (i = 1,2,\cdots m)$;

P_{ij} — количество полос шириной Δ_i, получаемых из рулона при его раскрое по варианту $j, (j = 1,2,\cdots n)$;

c_j — величина отхода по боковой кромке при раскрое по варианту $j, (j = 1,2,\cdots n)$; B — ширина исходного рулона.

Ограничение $0 \le c_j \le min\{\Delta_i\}$, означает, что ширина отхода по боковой кромке для любого варианта раскроя не должна превышать самой узкой полосы, что и является признаком полноценности варианта.

Сформулируем задачу: требуется свести к минимуму отходы при раскрое т.е. найти минимум целевой функции при заданных ограничениях. Совокупность (2.5) является математической моделью данной задачи.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} c_i x_j = min \\ &\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, x_j \ge A_i, (i = 1,2,\cdots m) \\ &x_j \ge 0, \qquad (j = 1,2,\cdots n) \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Пример.

В заготовительный цех поступили данные о заказах:

Требуемая ширина	Требуемое количество

пленки в мм	рулонов, шт.
28	30
20	60
15	48

Все это требуется нарезать из стандартных 60 мм. рулонов.

Решение.

1. Составим таблицу возможных вариантов раскроя, используя формулу (1).

Требуемая ширина пленки, мм	Варианты раскроя							Число заказанных рулонов
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
28	2	1	1	0	0	0	0	30
20	0	1	0	3	2	1	0	60
15	0	0	2	0	1	2	4	48
Потери	4	12	2	0	5	10	0	

Каждая переменная неотрицательна ($x_j \geq 0$) – мы или разрезаем рулоны при данном расположении лезвии на станке, или не разрезаем.

2. Построим математическую модель задачи: для 28-мм имеем: $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$ для 20-мм имеем: $2x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60$ для 15-мм имеем: $2x_3 + x_5 + 2x_6 + 4x_7 \geq 48$

Найти минимум целевой функции

$$Z = 4x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 0 \cdot x_7$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 30 \\ 2x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60 \\ 2x_3 + x_5 + 2x_6 + 4x_7 \geq 48 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0;$$

Для решения задачи используем двойственный симплексный метод (ДСМ). Поэтому, вводя дополнительные переменные и умножая обе части на -1, получим задачу в канонической форме для которой нужно найти максимум целевой функции.

Найдем максимум целевой функции

$$Z = -4x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 0 \cdot x_4 - 5x_5 - 10x_6 - 0 \cdot x_7$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = -30 \\ -2x_2 - 3x_4 - 2x_5 - x_6 = -60 \\ -2x_3 - x_5 - 2x_6 - 4x_7 = -48 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0;$$

Решение задачи проведем на симплексных таблицах.

Исходная запись задачи.

Табл.1

	c_j	0	-4	-12	-2	0	-5	-10	0	0	0	0	
c_i	П / Б	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	к $\sum$
0	x_8	-30	-2	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-33
0	x_9	-60	0	-1	0	-3	-2	-1	0	0	1	0	-66
0	x_{10}	-48	0	0	-2	0	-1	-2	-4	0	0	1	-56
	Δ_j	0	4	12	2	0	5	10	0	0	0	0	33

Табл.2

			c_j	0	-4	-12	-2	0	-5	-10	0	0	0	0	
c_i			П / Б	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	к $\sum$
0			x_8	-30	-2	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-33
0			x_4	20	0	$1/3$	0	1	$2/3$	$1/3$	0	0	$-1/3$	0	22
0			x_{10}	-48	0	0	-2	0	-1	-2	-4	0	0	1	-56
			Δ_j	0	4	12	2	0	5	10	0	0	0	0	33

Табл.3

	c_j	0	-4	-12	-2	0	-5	-10	0	0	0	0	
c_i	П / Б	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	к $\sum$
0	x_8	-30	-2	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	-33
0	x_4	20	0	$1/3$	0	1	$2/3$	$1/3$	0	0	$-1/3$	0	22
0	x_7	12	0	0	$1/2$	0	$1/4$	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	14
	Δ_j	0	4	12	2	0	5	10	0	0	0	0	33

Табл.4

	c_j	0	-4	-12	-2	0	-5	-10	0	0	0	0	
c_i	П / Б	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	к $\sum$
-4	x_1	15	1	$1/2$	$1/2$	0	0	0	0	$-1/2$	0	0	$33/2$
0	x_4	20	0	$1/3$	0	1	$2/3$	$1/3$	0	0	$-1/3$	0	22

0	x_7	12	0	0	$1/2$	0	$1/4$	$1/2$	1	0	0	$-1/4$	14
	Δ_j	-60	0	10	0	0	5	10	0	2	0	0	-33

В таблице 4 получено оптимальное решение. Им является вектор $\bar{X} = (15,0,0,20,0,0,12,0,0,0)$, а значение целевой функции равно -60. Это означает, что по варианту x_1 будет раскроено 15 рулонов, по варианту x_4будет раскроено 20 рулонов, по x_7 -12 рулонов, а отходы суммарные будут минимальными и равняться 60 мм. При этом заказ цеха выполняется точно (28 мм-30 шт., 20 мм -20 шт., 15 мм -48 шт.).

2.6 Межпродуктовый баланс производства и распределения

Межпродуктовый баланс означает межотраслевые потоки (производство и распределение продукции). При разработке таких, балансов пользуются понятием промежуточного и конечного продукта.

Промежуточным называют такой продукт, который поступает в дальнейшую переработку (предметы труда, которые направляются в сферу материального производства).

Конечным продуктом называют продукт, который не поступает в текущее производственное потребление, а выходит за его пределы (капитальные вложения, непроизводственное потребление и т.д.).

Сущность баланса в том, что все количество произведенной продукции каждого вида расходуется на производство других видов продукции, а остаток составляет конечный продукт. Расходы на производство характеризуются коэффициентами прямых затрат. Величина потребления продукции равна произведению коэффициентов прямых затрат на объем производства продукции. Задача состоит в том, чтобы зная коэффициенты прямых затрат и уровни конечного продукта, определить объемы производства и наоборот.

Математическая модель задачи

Пусть в рассматриваемой системе производства n видов продукции($i =$ ции($i = 1,2, \cdots n$). Обозначим объемы производства этих видов ции X_i, т.е. соответственно $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$.

Объем конечного продукта обозначим соответственно $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots, Y_n$.

Обозначим через x_{ij} количество продукции i -го вида, расходуемый на производство всего объема продукции j-го вида ($i = j$).

Объем производства и распределения продукции запишем:

$$X_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + Y_i$$

Математическую модель задачи выразим формулой

$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \qquad (i = 1,2, \cdots n)$, где

X_i-объем производства продукции i -го вида;

x_{ij}- количество продукции i -го вида, расходуемый на производство продукции j-го вида;

Y_i- конечный продукт i -го вида.

Для решения задачи нужно определить коэффициенты прямых затрат по формуле:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

Теперь математическая модель задачи примет вид:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \qquad (i = 1,2, \cdots n).$$

Если заданы значения Y_i (конечных продуктов) или X_i (объем производства), то данная система уравнений может быть решена относительно X_i или относительно Y_i. Мы будем пользоваться матричной формой записи задачи. В матричной форме математическая модель задачи запишется: $X = AX + Y$.

Решим ее относительно X.

$X - AX = Y$

$(E - A)X = Y$

$(E-A)^{-1}(E-A)X=(E-A)^{-1}Y$

$EX=(E-A)^{-1}Y$

$X=(E-A)^{-1}Y,$

Введем обозначение $B=(E-A)^{-1}$, тогда уравнение примет вид: $X=BY$, где X- вектор объемов производства;

$B=(E-A)^{-1}$ – матрица полных затрат;

A- матрица коэффициентов прямых затрат;

Y- вектор уровней конечного продукта;

E- единичная матрица.

Если заданы значения вектора, Y, то данное уравнение решается относительно вектора X. Покажем это на примере.

в) Пусть известно следующие данные относительно 3-ех продуктов (в услов. ед.):

Вид продукта	Коэфф. прям. затрат			Промеж. продукт	Конечн. продктY_i	Общее производство продуктов (X_i)
	A	B	C			
A	0,5	0,3	0,1	$\sum_{j=1}^{3} a_{1j}X_j$	12	$X_1=\sum_{j=1}^{3} a_{1j}X_j+12$
B	0,1	0,2	0,3	$\sum_{j=1}^{3} a_{21j}X_j$	5	$X_2=\sum_{j=1}^{3} a_{21j}X_j+5$
C	0,4	0,6	0,5	$\sum_{j=1}^{3} a_{3j}X_j$	15.6	$X_3=\sum_{j=1}^{3} a_{3j}X_j+15{,}6$

Запишем систему уравнений баланса в матричной форме:

$$X=(E-A)^{-1}Y$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 15{,}6 \end{bmatrix}$$

г) Решим данное матричное уравнение, используя известный метод получения обратной матрицы.

1) Сначала вычислим определитель матрицы $C = E - A$ методом Лапласа, разложением по второму столбцу:

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,8 & -0,3 \\ -0,4 & -0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \; |C| = c_{12}C_{12} + c_{22}C_{22} + c_{32}C_{32}$$

$$= -0,3 \cdot (-1)\begin{vmatrix} -0,1 & -0,3 \\ -0,4 & 0,5 \end{vmatrix} + 0,8\begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & 0,5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0,6\begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = -0,3 \cdot 0,17 + 0,8 \cdot 0,21 - 0,6 \cdot 0,16$$

$$= 0,021, |C| \neq 0$$

где C_{i2}- алгебраические дополнения элементов второго столбца матрицы C; $|C| \neq 0$ следовательно, матрица $B = C^{-1}$ существует. Найдем эту матрицу по формуле

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} C^*,$$

где C^*-присоединенная матрица к матрице C. Ее находим по формуле: $C^* = C_{ij,}^T$ где C_{ij}^T, алгебраические дополнения транспонированной матрицы

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,1 & -0,4 \\ -0,3 & 0,8 & -0,6 \\ -0,1 & -0,3 & 0,5 \end{bmatrix}, C_{ij}^T = \begin{bmatrix} C_{11}^T & C_{12}^T & C_{13}^T \\ C_{21}^T & C_{22}^T & C_{23}^T \\ C_{31}^T & C_{32}^T & C_{33}^T \end{bmatrix}$$

$$C_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,3 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,22 \quad C_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -0,3 & -0,6 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,21$$

$$C_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -0,3 & 0,8 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = 0,17 \quad C_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -0,1 & -0,4 \\ -0,3 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,17$$

$$C_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0,5 & -0,4 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,21 \quad C_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,1 & -0,3 \end{vmatrix} = 0,16$$

$$C_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -0,1 & -0,4 \\ 0,8 & -0,6 \end{vmatrix} = 0,38$$

$$C_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0,5 & -0,4 \\ -0,3 & -0,6 \end{vmatrix} = 0,42$$

$$C_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,37$$

2) Составляем присоединенную матрицу C^*.

$$C^* = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,21 & 0,17 \\ 0,17 & 0,21 & 0,16 \\ 0,38 & 0,42 & 0,37 \end{bmatrix}$$

3) Находим обратную матрицу

$$B = C^{-1} = \frac{1}{|C|} C^* = \frac{1}{0,021} \cdot \begin{bmatrix} 0,22 & 0,21 & 0,17 \\ 0,17 & 0,21 & 0,16 \\ 0,38 & 0,42 & 0,37 \end{bmatrix}$$

4) Находим решение задачи:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0,021} \cdot \begin{bmatrix} 0,22 & 0,21 & 0,17 \\ 0,17 & 0,21 & 0,16 \\ 0,38 & 0,42 & 0,37 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 15,6 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 302 \\ 266 \\ 592 \end{bmatrix};$$

то есть $X_1 = 302; X_2 = 266; X_3 = 592.$

Полученный результат решения межпродуктового баланса означает: что при желании получить конечный продукт A- вида в размере $Y_1 = 12$ необходимо, чтобы объем производства этой продукции составил $X_1 = 302$; для получения конечного продукта B- вида в размере $Y_2 = 5$ необходимо, чтобы объем производства этого вида продукции составлял $X_2 = 266$ и наконец, для получения конечного продукта C – вида в размере $Y_3 = 15,6$ объем производства $X_3 = 592$.

2.7 Модель межотраслевого баланса В. Леонтьева

Межотраслевой баланс (МОБ, метод «затраты – выпуск») – экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимыми для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Межотраслевой баланс (МОБ) представляет собой таблицу, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе. Таблица показывает структуру затрат на производство каждого продукта и структуру его распределения в экономике. По столбцам отражается стоимостный состав валового выпуска отраслей экономики по элементам промежуточного потребления и добавленной стоимости. По строкам отражаются направления использования ресурсов каждой отрасли.

Межотраслевой баланс представляет собой также инструмент анализа и прогнозирования структурных взаимосвязей в экономике. Метод его построения состоит в двойственном рассмотрении различных отраслей и секторов экономики: с одной стороны, как потребляющих продукцию, с другой - как выпускающих те или иные виды товаров и услуг для собственного потребления и нужд других отраслей экономики.

Межотраслевой баланс - это "шахматная таблица" отраслей, в которой по вертикали показываются материальные затраты на производство продукции определенной отрасли хозяйства, по горизонтали - количество продукции, переданное из данной отрасли в другие на производственные нужды (промежуточный продукт), а также конечное потребление продукции отраслью. Используя эти данные, можно определить удельные затраты какого-либо ресурса на выпуск конечного продукта. Для этого выбранный показатель столбца или строки делится на величину валового продукта. Например, разделив величину затрат электроэнергии на объем продукции машиностроения, получим удельное электропотребление машиностроительного производства.

В общем виде модель МОБ Леонтьева имеет следующий вид: $X = AX + Y$, где X - объем производства какой-либо отрасли; Y - конечный продукт этой отрасли; A- матрица технологических коэффициентов прямых затрат a_{ij}, которые показывают, сколько продукции отрасли необходимо затратить для производства единицы продукции данной отрасли.

Данная модель показывает взаимосвязь производства и конечного продукта. Она развертывается в систему уравнений, где отображены различные отрасли со специфическими технологическими коэффициентами.

Применение таблиц "затраты - выпуск" дает возможность проследить, каким образом рост производства какой-либо отрасли вызывает адекватный рост остальных отраслей.

Модель МОБ применяется для специального анализа макро-экономического равновесия трудовых ресурсов общества и объемов выпуска продукта, производства и распределения основных производственных фондов для других целей. Межотраслевой баланс позволяет провести анализ взаимозависимости цен в макроэкономике, оценить материальные и трудовые издержки, определить добавленную стоимость. Метод "затраты - выпуск" предоставляет информацию, которую практически невозможно получить, применяя другие методы и модели макроэкономического анализа.

Однако с точки зрения экономического прогнозирования эта модель имеет существенный недостаток, который усугубляется при прогнозировании динамически развивающегося общества. Модель демонстрирует формулу экономического развития на базе уже сложившихся технологических коэффициентов. При экстенсивном развитии этот вариант возможен, но в условиях интенсификации производства технологические коэффициенты становятся подвижными, поэтому делать прогнозы на основе старых пропорций не вполне обоснованно.

Одним из важных разделов современной системы национальных счетов (СНС) является межотраслевой баланс (МОБ) производства и использования товаров и услуг, который детализирует счета товаров и услуг, производства и образования доходов; отражает процессы, происходящие на нынешнем этапе развития экономики; позволяет проводить системный счет основных показателей и анализ взаимосвязей между отраслями экономики, выявлять главные экономические пропорции, изучать структурные сдвиги и особенности ценообразования в экономике и т.д.

Общую схему межотраслевого баланса можно представить в виде:

Таблица 1.

Межотраслевой баланс.

Распределение	Производственное потребление				Конечный продукт		
Материальные затраты	1	2	3	4	Потреб-ление	Нагро-мож-дение	
1.Промышленность 2.Сельское хоз-во 3.Строительство 4.Транспорт	Межотраслевые поставки продук-ции				Отраслевые эле-менты конечного продукта		Валовой продукт
Амортизация. Чистый продукт. Зарплата и др.							
Всего валовой про-дукт							

Принципиальная схема МОБ производства и распределения совокупного общественного продукта в стоимостном выражении приведена в таблице 2. В основу этой схемы положено разделение совокупного продукта на две части: промежуточный и конечный; все народное хозяйство представлено в виде совокупности n отраслей (чистые отрасли), при этом каждая отрасль фигурирует в балансе как производящая и потребляющая.

Таблица 2.

Схема межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли					Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3	…	n		
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	…	X_{1n}	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	…	X_{2n}	Y_2	X_2
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	…	X_{3n}	Y_3	X_3

.	.	.	.	…	.	.	.
.	.	.	.	**1**	.	**2**	.
.	.	.	.	.	.	.	.
n	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}	…	X_{nn}	Y_n	X_n
Амортизация	C_1	C_2	C_3	…	C_n		
Оплата труда	V_1	V_2	V_3	**3**	V_n	**4**	
Чистый доход	M_1	M_2	M_3	…	M_n		
Валовой продукт	X_1	X_2	X_3	…	X_n	$\sum_i X_i = \sum_j X_j$	

Рассмотрим схему МОБ в разрезе его крупных составных частей. Выделяются четыре части, имеющие различное экономическое содержание, они называются квадрантами баланса и на схеме обозначены цифрами.

Первый квадрант МОБ это шахматная таблица межотраслевых материальных связей. Показатели, помещенные на пересечении строк и столбцов, представляют собой величины межотраслевых потоков продукции и в общем виде обозначаются x_{ij}, где i и j, соответственно, номера производящих и потребляющих отраслей. Так, величина X_{32} понимается как стоимость средств производства, произведенных в отрасли 3 и потребленных в качестве материальных затрат в отрасли 2. Таким образом, первый квадрант по форме представляет собой квадратную матрицу порядка n, сумма всех элементов которой равна годовому фонду возмещения затрат средств производства в материальной сфере.

Во втором квадранте представлена конечная продукция всех отраслей материального производства, при этом под конечным понимается продукт, выходящий из сферы производства в область конечного использования (на потребление и накопление). В таблице 2 этот раздел дан укрупнённо в виде столбца величин Y. В развернутой схеме баланса конечный продукт каждой отрасли показан дифференцированно по направлениям использования на личное потребление населения, общественное потребление, на накопление, возмещение потерь, экспорт и др. Итак, второй квадрант характеризует отраслевую материальную структуру национального дохода (НД), а в развернутом виде также характеризует распределение НД на фонд накопления, фонд потребления, структуру потребления и накопления по отраслям производства и потребителям.

Третий квадрант МОБ также характеризует НД, но со стороны стоимостного состава как сумму чистой продукции и амортизации; чистая продукция понимается при этом как оплата труда и чистого дохода отраслей. Сумму амортизации (C_j) и чистой продукции (V_j) некоторой отрасли будем называть условно чистой продукцией этой отрасли и обозначать в дальнейшем Z_j.

Четвертый квадрант баланса находится на пересечении столбцов второго квадранта (конечной продукции) и строк третьего квадранта (условно чистой продукции). Этим определяется содержание квадранта: он отражает конечное распределение и использование НД. В результате перераспределения первоначально созданного НД образуются конечные доходы населения, предприятий, государства. Данные четвертого квадранта важны для отражения в межотраслевой модели баланса доходов и расходов населения, источников финансирования капиталовложений, текущих затрат непроизводственной сферы, для анализа общей структуры конечных доходов по группам потребителей. Общий итог четвертого квадранта, так же как второго и третьего, должен быть равен созданному за год НД.

Таким образом, в целом МОБ в рамках единой модели объединяет балансы отраслей материального производства, баланс совокупного общественного продукта, балансы НД, финансовый баланс и баланс расходов и доходов населения. Следует особо отметить, что хотя валовой общественный продукт не входит в рассмотренные выше четыре квадранта, он представлен в принципиальной схеме МОБ в двух местах в виде столбца, расположенного справа от второго квадранта, и в виде строки ниже третьего квадранта. Эти столбец и строка валовой продукции замыкают схему МОБ и играют важную роль как для проверки правильности заполнения квадрантов (т.е. проверки самого баланса), так и для разработки экономико-математической модели МОБ. Если, как показано на схеме, обозначить валовой продукт некоторой отрасли буквой X с нижним индексом, равным номеру данной отрасли, то можно записать два важнейших соотношения, отражающих сущность МОБ и являющихся основой его экономико-математической модели.

Во-первых, рассматривая схему баланса по столбцам, можно сделать очевидный вывод, что итог материальных затрат любой потребляющей отрасли и ее условно чистой продукции равен валовому продукту этой отрасли. Данный вывод можно записать в виде следующего соотношения:

$$X_j = \sum_i x_{ij} + Z_j, \quad j = 1, \ \ldots, \ n \qquad (1)$$

Величина условно чистой продукции Z_j равна сумме амортизации, оплате труда и чистого дохода отрасли. Соотношение (1) охватывает систему из n уравнений, отражающих стоимостной состав продукции всех отраслей материальной сферы.

Во-вторых, рассматривая схему МОБ по строкам для каждой производящей отрасли, можно видеть, что валовая продукция той или иной отрасли равна сумме материальных затрат отраслей, потребляющих ее продукцию, и конечной продукции данной отрасли:

$$X_i = \sum_i x_{ij} + Y_j, \quad j = 1, \ \ldots, \ n \qquad (2)$$

Формула (2) описывает систему из n уравнений, которые называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства по направлениям использования.

Просуммируем по всем отраслям уравнение (1), в результате получим:

$$\sum_j X_j = \sum_j \left(\sum_i x_{ij} + Z_j \right)$$

Аналогичное суммирование уравнений (2) дает:

$$\sum_i X_i = \sum_i \left(\sum_i x_{ij} + Y_i \right)$$

Левые части обоих равенств равны, так как представляют собой весь валовой общий продукт. Первые слагаемые правых частей этих неравенств также равны; их величина равна итогу первых квадрантов; следовательно, должно соблюдаться соотношение

$$\sum_j Z_j = \sum_i Y_i \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) сумма третьего квадранта, а правая часть итог второго квадранта. В целом же это уравнение показывает, что в МОБ соблюдается важнейший принцип единства материального и стоимостного состава НД.

Выше было отмечено, что основу информационного обеспечения модели МОБ составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых материальных затрат на производство единицы продукции. Эта матрица является также основной экономико-математической моделью МОБ. Предполагается, что для производства единицы продукции необходимо определенное количество затрат промежуточной продукции i - й отрасли, равной 0. Оно не зависит от объема производства в отрасли и является довольно стабильной величиной во времени. Величины A_{ij} называют коэффициентами прямых материальных затрат и рассчитывают следующим образом:

$$A_{ij} = x_{ij} / X_{ij}, \quad i, j = 1, \ \ldots, \ n \qquad (4)$$

Коэффициент прямых материальных затрат показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, если учесть только прямые затраты, для производства единицы продукции j-й отрасли.

С учетом формулы (4) систему уравнений баланса (2) можно записать в следующем виде:

$$X_i = \sum_j a_{ij} X_j + Y_i, \quad j = 1, \; \ldots, \; n \quad (5)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = \{ay\}$, вектор столбец валовой продукции X и вектор столбец конечной продукции Y, то система уравнений (5) в матричной форме примет следующий вид:

$$X = AX + Y \qquad (6)$$

Система уравнений (5), или в матричной форме (6), называется экономико-математической моделью МОБ (моделью Леонтьева, или моделью "затраты – выпуск").

На основе межотраслевого баланса рассчитываются макроэкономические показатели, промежуточное потребление, затраты ресурсов, осуществляется анализ влияния спроса, цен, изменений в заработной плате на экономику в целом и на отдельные отрасли.

Показатели межотраслевого баланса могут применяться также для международных сравнений производственных структур и результатов.

При переходе к рыночным отношениям в странах СНГ и других бывших социалистических странах ведутся исследования по разработке межотраслевого баланса в Системе национальных счетов, в котором основным макроэкономическим показателем является валовой национальный продукт, т.е. осуществляется переход от МОБ в системе баланса народного хозяйства к МОБ в системе национальных счетов.

Концепция СНС рассматривает экономику как единое целое без проведения принципиальных различий между производством материальных благ и деятельностью по оказанию услуг.

По модели межотраслевого баланса можно выполнять два типа расчетов: первый, когда по заданному уровню конечного потребления определяются масштабы общественного производства и структура экономики; второй, когда по заданным объемам производства по одним отраслям (продуктам) и заданному конечному потреблению в других отраслях формируется баланс производства и потребления продуктов.

Первый тип применяется в основном при разработке прогнозных расчетов, второй - на стадии формирования планов, их корректировки (внесения уточнений по объемам производства той или иной продукции).

Для разработки межотраслевого баланса используются коэффициенты прямых ***a*** и коэффициенты полных b затрат.

Коэффициенты прямых затрат - это среднеотраслевые нормативы расхода материальных ресурсов на производство единицы определенного вида продукции (услуг). Они имеют натуральную и денежную форму в зависимости от того, в каком виде составляется МОБ. С их помощью рассчитываются межотраслевые потоки $a_{ij}x_j$, и определяются материальные затраты по отраслям экономики.

Коэффициенты полных затрат характеризуют затраты на производство единицы конечного продукта (конечного использования ВНП) по всей цепи сопряженных отраслей. Они определяются на основе коэффициентов прямых затрат и отличаются от последних на величину косвенных затрат. Коэффициенты полных затрат используются для расчета валовой продукции по каждой отрасли путем их умножения на объем конечного продукта (конечного использования ВНП).

Пример расчета межотраслевого баланса

Рассмотрим 2 отрасли промышленности: производство угля и стали. Уголь требуется для производства стали и некоторое количество стали в виде инструментов требуется для добычи угля. Предположим, что условия таковы: для производства 1 т. стали нужно 3 т. угля, а для 1 т. угля — 0,1 т. стали.

Таблица 3.

Пример расчета межотраслевого баланса.

Отрасль	Угольная	Металлургическая
Уголь	0	3
Сталь	0,1	0

Мы хотим, чтобы чистый выпуск угольной промышленности был $2\cdot 10^5$ тонн угля, а стальной промышленность —$5\cdot 10^4$ тонн стали. Если каждая из них будет производить лишь $2\cdot 10^5$ и $5\cdot 10^4$ тонн, то часть продукции будет использоваться в другой отрасли. Для производства $5\cdot 10^4$ тонн стали требуется $3\cdot 5\cdot 10^4 = 15\cdot 10^4$ тонн угля, а для производства $2\cdot 10^5$ тонн угля нужно $0{,}1\cdot 2\cdot 10^5 = 2\cdot 10^4$ тонн стали. Чистый выход будет равен: $2\cdot 10^5 - 1{,}5\cdot 10^5 = 0{,}5\cdot 10^5$ тонн угля и $5\cdot 10^4 - 2\cdot 10^4 = 3\cdot 10^4$ тонн стали. Нам нужно дополнительно производить уголь и сталь, чтобы использовать их в другой отрасли. Обозначим x_1 — количество угля, x_2 — количество стали. Валовый выпуск каждой продукции найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2\cdot 10^5 \\ -0{,}1x_1 + x_2 = 5\cdot 10^4 \end{cases}$$

Решение: (500000;100000). Для систематического решения задач расчета межотраслевого баланса находят, сколько угля и стали требуется для выпуска 1 т. каждого продукта.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ -0{,}1x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$x_1 = 1{,}42857$ и $x_2 = 0{,}14286$. Чтобы найти, сколько угля и стали нужно для чистого выпуска $2\cdot 10^5$ т. угля, нужно умножить эти цифры на $2\cdot 10^5$. Получим: (285714; 28571). Аналогично составляем уравнения для получения количества угля и стали для выпуска 1 т. стали:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -0{,}1x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

$x_1 = 4.28571$ и $x_2 = 1.42857$. Для чистого выпуска $5 \cdot 10^4$т. стали нужно: (214286; 71429). Валовый выпуск для производства $2 \cdot 10^5$тонн угля и $5 \cdot 10^4$ тонн стали: (285714 + 214286; 28571 + 71429) = (500000;100000).

Упрощённая трёхсекторная модель «затраты - выпуск»

Направление	**Сектор1** Сельское хозяйство	**Сектор2** Обрабатывающая промышленность	**Сектор3** Домохозяйства	Общий выпуск
Сектор1 Сельское хоз-во	25	20	55	100 бушелей пшеницы
Сектор2 Обрабатывающая промышленность	14	6	30	50 ярдов ткани
Сектор3 Домохозяйства	80	180	40	300 человеко- лет труда

В таблице показан годовой объём производства. Девять клеток выделенного квадрата показывают межсекторные потоки. Так, из 100 бушелей пшеницы, произведенных первым сектором, 25 бушелей потребляются самим сельским хозяйством, 20 бушелей – обрабатывающей промышленностью, они составляют затраты второго сектора, а 55 бушелей потребляет сектор домохозяйств. Второй сектор за год произвёл 50 ярдов ткани, 6 из которых потребил сам, 14 – продал первому сектору, 30 – сектору домохозяйств. Домохозяйства за год потратили 300 человеко-часов труда, из них 18 – в секторе 1, 180 – в секторе 2, и 40 потреблено внутри сектора домохозяйств.

Модель «затраты – выпуск» может описать национальную экономику, включая 500-600 и больше разных секторов, отраслей.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Экономика состоит из 3-ёх отраслей: промышленность, с/х-во, прочие отрасли. Задана матрица коэффициентов прямых затрат ***а*** и вектор конечной продукции **У**:

$$a = \begin{vmatrix} 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{vmatrix} \qquad У = \begin{vmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{vmatrix}$$

Необходимо рассчитать объем валовой продукции, межотраслевые потоки, чистую продукцию отраслей и результаты представить в форме межотраслевого баланса.

2.8 Задача определения оптимального варианта затрат времени

Изучение затрат рабочего времени в практике технического нормирования осуществляется, как известно, путем непосредственного наблюдения методом хронометража и фотографии рабочего дня. Решение подобной задачи предлагается решить **симплекс-методом** следующим образом.

Предлагается исследовать несколько однородных рабочих мест, специализированных на выполнении операций двух видов. На каждом рабочем месте за один и тот же календарный период выполняются все или часть операций. При этом под фондом времени понимается все отработанное, а не только полезное время. Формула, связывающая фонд времени и затраты на выполнение отдельных операций, имеет вид: $\Phi \geq a_1\bar{x}_1 = a_2\bar{x}_2 = ... = a_n\bar{x}_n$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ - число отдельных операций, выполненных за данный период: $\bar{x}_1.\bar{x}_2,...\bar{x}_n$ - искомые средние затраты времени на каждую операцию.

Особенности решения этой задачи сначала рассмотрим на несколько упрощенном примере. Предположим, конструктор за первые 8 дней работы сконструировал одну деталь первой группы сложности и две – второй группы; в следующие 7 дней он сконструировал две детали первой группы сложности и одну – второй, а в последние 6 дней одну деталь первой и одну – второй группы сложности. Эти условия задачи могут быть записаны в виде неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x \le 7 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases} \qquad (1)$$

где x_1 - время конструирования одной детали первой группы сложности; x_2 - время конструирования одной детали второй группы сложности. Запись времени на конструирование деталей этих групп сложности в виде неравенств показывает, что конструктор мог иметь потери времени за счет различных непроизводительных затрат труда. Обозначив потери времени в течение трех периодов работы соответственно через y_1, y_1, y_3; перейдем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 + y_2 &= 7, \\ x_1 + x_2 + y_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (2)$$

Далее определяется линейная функция, которая минимизирует суммарные затраты времени, представленные дополнительными переменными (y_1, y_1, y_3). Эта функция является суммой всех уравнений (2): $4x_1 + 4x_2 + Q = 21$, (3) ,где $Q = y_1 + y_2 + y_3$ - сумма дополнительных переменных (или непроизводительных затрат времени). Из уравнения (3) видно, что за 21 рабочий день конструктор сконструировал 8 деталей: 4 детали первой группы сложности и 4детали второй группы (в общий срок работы включаются и непроизводительные затраты).

Задача заключается в нахождении таких значений x_1 и x_2, которые бы не противоречили системе уравнений (1) и сводили бы к минимуму сумму непроизводительных затрат $(y_1 + y_2 + y_3 - min)$, или, что и одно и тоже, максимально приблизили время производительной работы к 21 дню ($4x_1 + 4x_2 = \max)$. Может быть избран любой критерий в зависимости от условий конкретной задачи. Решается задача симплексным методом. Для этого необходимо найти по крайней мере один вариант, не противоречащий системе (2), либо принять вариант с нулевыми затратами на основные работы: $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. В таком случае потери и непроизводительные затраты рабочего времени будут равны величине, стоящей в правой части системы (2): $y_1 = 8,\ y_2 = 7,\ y_3 = 6$. Этот вариант также не противоречит системе (2).

Исходя из нулевого варианта, путем последовательного изменения значений x_1 и x_2 следует добиться максимально возможного значения суммы $4x_1 + 4x_2$.

С этой целью строится первая симплексная таблица. Исходные данные записываются в виде системы уравнений:

$$8 = x_1 + 2x_2 + y_1$$
$$7 = 2x_1 + x_2 + y_2$$
$$6 = x_1 + x_2 + y_3 = 6$$
$$0 - C - 4x_1 - 4x_2$$

И в табличной форме:

База	x_0	x_1	x_2
y_1	8	1	2
y_2	7	2	1
y_3	6	1	1
C	0	-4	-4

После проведения трех итераций по алгоритму симплекс-метода на последней симплексной таблице получим оптимальный вариант затрат времени:

$$x_1 = 2;\ \ y_1 = 0,$$
$$x_2 = 3;\ \ y_2 = 0,$$
$$y_3 = 1$$

Это означает, что на конструирование одной детали первой группы сложности тратиться 2 дня, а второй – 3 дня. В первые два периода работы непроизводительных затрат времени не было, а в третий период имел место простой в течение одного дня.

Многие задачи экономики, в том числе задачи оптимизации организации и нормирования труда (например, оптимальное распределение рабочих на конвейере и на поточной линии, распределение рабочих по видам работ и т.д.). можно решить методом динамического программирования, где учитываются временные изменения и используется аппарат рекуррентных соотношений [3]. Процесс решения расчленяется на этапы, решаемые последовательно во времени и приводящие, в конечном счете, к искомому решению.

2.9 Задача оптимального распределения рабочих по видам работ

Рассмотрим сущность метода динамического программирования при решении задачи.

Экономическая постановка задачи. Имеется некоторое количество работ с различной производительностью. Требуется так распределить имеющихся в наличии рабочих, чтобы получить максимальную производительность по всей совокупности работ. При этом количество производимой продукции может зависеть от количества рабочих нелинейно. В качестве критерия оптимальности используется показатель производительности труда по всей совокупности работ. Поскольку, производительность труда определяется как частное от деления количества выпускаемой продукции на численность рабочих, то требование достичь максимальной производительности при постоянной численности рабочих адекватно продукции при той же численности рабочих.

Для математической постановки задачи введем обозначения:

X - общая численность рабочих;

i - номер трудовых процессов $(i = 1,2,...,v)$;

X_i - численность рабочих для выполнения i-го вида работ;

Y_i - количество продукции на i-ом виде работ;

Y - общий выпуск продукции по всем видам работ (процессам).

В этих обозначениях условие 3 запишется так:

$Y(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1(x_1) + y_2(x_2) + ... + y_n(x_n)$ (5)

Кроме того выполняются условия:

а) численность рабочих не может быть отрицательной $x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,...,n)$;

б) общая численность рабочих полностью распределяется по всем процессам $\sum_{i=1}^{n} x_i = X$ (6).

Исходя из принципа вложения, можем рассматривать задачу в общем виде, то есть считать, что X и n принимают положительные значения.

Введем функцию $f_n(x) = \max Y(x_1, x_2, ..., x_n)$; (7)

$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,...,n)$ (8) $\sum_{i=1}^{n} x_i = X$ (9)

Функция $f_n(x)$ выражает максимальное значение функции $Y(x_1, x_2, ..., x_n)$ при оптимально выбранных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, т.е. максимальную производительность труда при оптимальном распределении X рабочих по n трудовым процессам.

Функция $f_{n-1}(X - x)$ обозначает максимальный выпуск продукции, полученный при распределении $(X - x_n)$ рабочих, по $(n-1)$ процессу.

Положим $y_i(0) = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$, что вполне возможно в заданной задаче.

Тогда $f_n(0)=0$ для любой i $(i=1,2,...,n)$, так как $f_n(0)=\sum_{i=1}^{n} Y_i(0)$

Если $X \geq 0$, то $f_1(X)=y_1(X)$, то есть если всех рабочих отдать в первый процесс, то максимальный выпуск продукции, учитывая, что при $x_1 = X$ все $X_2 = X_3 = ... = X_n = 0$ и $y_i(0)=0$ $(i=1,2,...,n)$, будет равен выпуску продукции в первом процессе.

Чтобы придать статическому процессу динамический характер, решение задачи проводится по этапам. На первом этапе выделяется какое-то количество рабочих i-му процессу, тогда для остальных $(n-1)$ процессов распределению подлежат $(X-x_i)$ рабочих. Если $y_i(x_i)$ есть продукция, полученная от i-го процесса при выделении ему x_i рабочих, то рекуррентное уравнение имеет вид: $f_n(x)=y_n(x_n)+f_{n-1}(X-x_n)$ (10)

Очевидно, уравнение (10) удовлетворяет принципу оптимальности. В самом деле, какова бы ни была численность рабочих x_n согласно определению метода оставшиеся $X-x_n$ рабочих распределяются оптимально.

Зная $f_1(x)=y_1(x)$ и имея рекуррентное соотношение (10), можно определить последовательность $\{f_n(x)\}$ доля любого значения n и X.

Общая схема решения состоит в следующем:

Отрезок [OX] разбивается произвольными точками на части $\Delta;2\Delta;$ и т.д. и составляется расчетная таблица:

	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	…	$f_n(x)$
0						
Δ						
2Δ						
…	…	…	…	…	…	…
X						

Максимизация производится методом прямого перебора вариантов, т.е. с помощью уравнения (10) определяется $f_1(x)$ при $n=1$ для значений для значений $x=0,\Delta,2\Delta$. При найденной величине $f_1(x)$ определяется $f_2(x)$ для тех же значений x и т.д.

2.10 Транспортная задача

Модель транспортной задачи

Имеется т пунктов $S_1, S_2, \dots, S_m$ производства однородного продукта (угля, цемента и т. п.), причем объем производства в пункте S_i равен a_i единиц. Произведенный продукт потребляется в пунктах $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, и потребность в нем в пункте Q_j составляет b_j единиц, $j = 1, 2, \dots, n$.

Требуется составить план перевозок из пунктов $S_i, i = 1, 2, \dots, m$, в пункты Q_j, $j = 1, 2, \dots, n$, чтобы удовлетворить потребности в продукте b_j не допустить затоваривания пунктов производства и минимизировать транспортные расходы.

Пусть стоимость перевозок одной единицы (например, тонны) продукта из пункта S_i в пункт Q_j, равна c_{ij}. Накладывая условия линейности, будем считать, что при перевозке x_{ij} единиц продукта из S_i в Q_j транспортные расходы равны $c_{ij}x_{ij}$.

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются $x_{ij}, i = 1,2,\dots;\ m\, j = 1,2,\dots,n$ - объемы перевозок от i -го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

Планом перевозок называется набор чисел $(x_{ij}), i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,, i = 1, 2, \dots, m;$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n \qquad (2.2.1)$$
$$x_{ij} \geq 0,$$

Содержательный смысл уравнений (2.2.1) ясен: из пункта S_i при плане (x_{ij}) вывозится во все пункты Q_j объем $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$, который должен быть равен как раз запасу a_i.

В пункт Q_j поступает из всех пунктов S_i суммарное количество продукта:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij},$$

Требуется, чтобы оно в точности отвечало потребности b_j. Так как произведение $c_{ij}x_{ij}$ определяет затраты на перевозку груза от -го поставщика j-му потребителю, то суммарные затраты на перевозку всех грузов равны, то есть при плане перевозок (x_{ij}) транспортные расходы составят величину:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}. \qquad (2.2.2)$$

Так как по условию задачи нужно минимизировать суммарные затраты, то целевая функция задачи примет вид:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \rightarrow min \qquad (2.2.3)$$

Система ограничений задачи состоит из двух групп уравнений. Добавляя к ним условие неотрицательности объемов перевозок, запишем математическую модель транспортной задачи в виде:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.2.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m; \qquad (2.2.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n \qquad (2.2.6)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \qquad (2.2.7)$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а модель задачи закрытой. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а модель задачи открытой.

Далее рассмотрим задачу оптимального прикрепления потребителей к поставщикам.

Задача оптимального прикрепления потребителей к поставщикам

Построение экономико-математической модели

В самом общем виде задача оптимального прикрепления потребителей к поставщикам формируется следующим образом. Имеется **m** поставщиков, располагающих определенным количеством однородной продукции, и **n** потребителей, которым выделены фонды на данную продукцию. Соотношение между количеством поставщиков и количеством потребителей может быть любым, т. е. допускается m < n, m > n и m = n. Известны транспортные расходы по доставке единицы продукции (тонны, штуки, цистерны и т. д.) от любого поставщика до любого потребителя. Требуется прикрепить потребителей к поставщикам так, чтобы суммарные транспортные расходы по доставке всей продукции потребителям были минимальными. В простейшем случае предполагается, что суммарные ресурсы поставщиков равны общей потребности (фондам) потребителей.

Для построения экономико - математической модели оптимального прикрепления потребителей к поставщикам введем определенные обозначения и сопроводим построение модели числовым примером.

Обозначим:

i - номер (индекс) поставщика (i = I, 2, ..., m); пусть m = 5, т. е. пусть имеется пять поставщиков (i = 1,2, 3,4,5);

Ai- ресурсы i-го поставщика, т. е. количество продукции, которое данный поставщик может отправить потребителям; пусть A_1= 190 т, A_2 =230 т,

A_3 = 160 т, A_4 = 170 т, A_5 = 40 т, а всего 790 т; j— номер (индекс) потребителя (j = 1, 2…..n); пусть n = 6, тогда j = 1, 2, 3, 4, 5, 6; B_j – фонд (потребность) j-го потребителя; пусть B_1 = 120 m, B_2 = 170 m, B_3 = 270 m, B_4 = = 120 m, B_5 = 50 m, B_6 = 60 m, а всего 790 m. Как видим, суммарные ресурсы поставщиков и суммарная потребность потребителей равны, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j;$$

C_{ij} -транспортные расходы по доставке единицы продукции от i-го поставщика j-му потребителю; вместо транспортных расходов можно использовать расстояния между поставщиками и потребителями; пусть транспортные расходы (в руб.) для числового примера заданы в таблице 1.

X_{ij} - количество продукции, поставляемое i-м поставщиком j-му потребителю; эта величина неизвестна и подлежит определению; в процессе решения задачи должны быть найдены все значения x_{ij}, указанные в табл. 2.

Таблица 1

Поставщики (i) \ Потребители (j)	I	II	III	IV	V	VI
I	$c_{11}=2$	$c_{12}=3$	$c_{13}=9$	$c_{14}=8$	$c_{15}=10$	$c_{16}=5$
II	$c_{21}=8$	$c_{22}=4$	$c_{23}=5$	$c_{24}=6$	$c_{25}=9$	$c_{26}=7$
III	$c_{31}=11$	$c_{32}=5$	$c_{33}=3$	$c_{34}=2$	$c_{35}=8$	$c_{36}=3$
IV	$c_{41}=4$	$c_{42}=8$	$c_{43}=7$	$c_{44}=5$	$c_{45}=4$	$c_{46}=3$
V	$c_{51}=7$	$c_{52}=10$	$c_{53}=6$	$c_{54}=7$	$c_{55}=2$	$c_{56}=6$

Таблица 2

Потребители (j) Поставщики (i)	I	II	III	IV	V	VI
I	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}
п	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{26}
ш	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}
IV	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}	X_{45}	X_{46}
V	X_{51}	X_{51}	X_{51}	X_{51}	X_{51}	X_{51}

Приступим к построению модели. Как уже указывалось, экстремальные модели содержат целевую функцию и системы ограничений (условий). В рассматриваемой модели ставится задача свести к минимуму суммарные расходы. Для числового примера целевая функция будет иметь вид

$$2x_{11} + 5x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 7x_{15} + 2x_{16} + 6x_{21} + 10x_{22} + \\ + 8x_{23} + \cdots + 2x_{56} = \min.$$

В общем виде целевая функция выглядит так: минимизировать

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{21}x_{21} +$$
$$+ c_{22}x_{22} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min.$$

Достижение минимального значения целевой функции должно происходить при определенных условиях. Первое из них состоит в том, чтобы по оптимальному варианту от каждого поставщика планировалось к поставке то количество продукции, которым он располагает. Это условие для рассматриваемого числового примера записывается в виде следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &= 190\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &= 230\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &= 160\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} &= 170\\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} &= 40
\end{aligned}\right\} .$$

Второе условие предусматривает поставку каждому потребителю продукции в пределах выделенного фонда.

$$\left.\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 120\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 170\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 270\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 120\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 50\\
x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 60
\end{aligned}\right\}$$

Наконец, в модели указывается присущее многим моделям условие неотрицательности переменных $X_{ij} > 0$.

Таким образом, экономико-математическая модель оптимального прикрепления потребителей к поставщикам в лаконичной записи имеет следующий вид :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \min$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, n).$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Модель называется закрытой. Если же условия равенства ресурсов и потребности нет, то строится открытая модель, ограничения которой выражаются неравенствами. При этом возможны два случая. Первый, т. е, ресурсы превышают потребность. Задача состоит в том, чтобы определить, у кого из поставщиков и какое количество продукции следует оставить с точки зрения минимизации суммарных транспортных затрат. Второй: $\sum_{i=1}^{m} A_i < \sum_{j=1}^{n} B_j$, т. е. потребность превышает ресурсы. Задача состоит в том, чтобы определить, кто из потребителей и какое количество должен недополучить при сведении к минимуму общих транспортных затрат.

В первом случае экономико-математическая модель будет иметь вид:

минимизировать $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m); \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \qquad (10)$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \qquad (11)$$

115

$$:\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Во втором случае модель выглядит так: минимизировать

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant B_j \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Экономико-математические модели оптимального прикрепления потребителей к поставщикам характеризуются большим разнообразием в зависимости от того, какие факторы (условия) учитываются. В числе этих условий, кроме соотношения ресурсов поставщиков и потребителей (в связи с чем было введено понятие открытых и закрытых моделей), можно назвать:

- характер поставляемой продукции (различают модели для однородной, частично или полностью взаимозаменяемой продукции);

- степень устойчивости хозяйственных связей между поставщиками и потребителями (в этом случае модель может отражать обязательные поставки продукции от отдельных поставщиков определенным потребителям);

- степень агрегирования (укрупнения) поставщиков и потребителей (под пунктами потребления или пунктами отгрузки продукции могут подразумеваться целые районы);

Для решения задач оптимального прикрепления применяются методы линейного программирования. Рассмотрим сущность и порядок расчетов **методом потенциалов** (метод МОДИ) на примере задачи (п.1).

Расчеты удобно выполнять методом потенциалов в специальной таблице линейного программирования, в которую вносятся все исходные данные (табл. 3). Кроме ресурсов поставщиков, фондов потребителей и транспортных расходов (c_{ij}), проставленных во внутренних квадратах таблицы, в ней содержатся столбец и строка для записи потенциалов Ui и Vj, смысл которых будет раскрыт ниже.

Таблица 3

Поставщики (i) \ Потребители (j)		I	II	III	IV	V	VI	Ресурсы поставщиков
		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
I	U_1	x_{11} 2	x_{12} 3	x_{13} 9	x_{14} 8	x_{15} 10	x_{16} 5	190
II	U_2	x_{21} 8	x_{22} 4	x_{23} 5	x_{24} 6	x_{25} 9	x_{26} 7	230
III	U_3	x_{31} 11	x_{32} 5	x_{33} 3	x_{34} 2	x_{35} 8	x_{36} 3	160
IV	U_4	x_{41} 4	x_{42} 8	x_{43} 7	x_{44} 5	x_{45} 4	x_{46} 2	170
V	U_5	x_{51} 7	x_{52} 10	x_{53} 6	x_{54} 7	x_{55} 2	x_{56} 6	40
Фонд потребителей		120	170	270	120	50	60	790

Решение задачи начинается с построения исходного варианта перевозки. Метод потенциалов, как и ряд других методов линейного программирования, требует, чтобы исходный вариант и все последующие варианты удовлетворяли условиям:

во-первых, количество значений x_{ij}, отличных от нуля (занятых квадратов таблицы), должно быть на единицу меньше суммы числа поставщиков и числа потребителей; если количество поставщиков т, а количество потребителей n, то число занятых квадратов таблицы должно быть m + n -1. В нашем примере это число должно быть равно 5 + 6 - 1 = 10;

во-вторых, занятые квадраты таблицы должны быть расположены так, чтобы образовывать так называемую вычеркиваемую систему, сущность которой состоит в следующем. Представим себе пустографку, содержащую некоторую систему кружков. Система кружков называется вычеркиваемой, если кружки можно занумеровать в таком порядке, что кружок будет расположен в столбце или строке, не содержащей кружков с большими номерами, нежели у данного кружка. Для определения вычеркиваемости системы кружков можно пользоваться следующим правилом: найти кружок, единственный в своей строке или в своем столбце, дать ему номер 1 и вычеркнуть его. Среди оставшихся (в том числе и в строке или колонке, в которой уже вычеркнут кружок) опять найти единственный в своей строке или в своем столбце (зачеркнутый кружок при этом во внимание не принимается), дать ему номер 2 и вычеркнуть его и т. д. Если таким путем удастся занумеровать и вычеркнуть все кружки, то это значит, что перед нами вычеркиваемая система кружков.

Вычеркиваемая система

	I	II	III	IV	V	VI
I			∅ №10			
II	∅ №1	∅ №2			∅ №3	∅ №4
III				∅ №6		∅ №5
IV			∅ №9			
V			∅ №8	∅ №7		

Невычеркиваемая система

	I	II	III	IV	V	VI
I	∅ № 1		∅ № 3			
II					∅ № 6	
III		∅ № 2		∅ № 5		
IV			∅ № 4		○	○
V					○	○

Наиболее наглядное расположение кружков, образующее вычеркиваемую систему, представляется в виде так называемой «лесенки».

«Лесенка»

○	○				
	○	○			
		○	○		
			○	○	○

Практический смысл использования вычеркиваемой системы кружков состоит в том, что система обеспечивает взаимную связь всех элементов таблицы, а именно: в каждой строке есть хотя бы один кружок, который находится в таком столбце, в котором имеется хотя бы один кружок. Например, кружок № 4 из второй строки вычеркиваемой системы находится в шестом столбце, в котором содержится кружок № 5, в третьей строке наряду с кружком № 5 содержится кружок № 6, который расположен в четвертом столбце, и т. д.

Такое расположение кружков обеспечивает возможность связок квадратов таблицы, что потребуется нам в дальнейшем при решении поставленной задачи методом потенциалов.

Для несложных задач, подобных рассматриваемой, соблюсти указанные условия нетрудно даже при совершенно произвольном варианте прикрепления потребителей к поставщикам. Однако при большей размерности это бывает затруднительно. Поэтому рекомендуется использовать специфический прием для составления исходного варианта прикрепления. Этот прием в литературе получил название «метод северо-западного угла». Иногда его называют также диагональным методом.

Составим с помощью этого приема исходный вариант прикрепления и одновременно познакомимся с содержанием этого приема.

Согласно методу северо-западного угла заполнение таблицы прикрепления следует начинать с левого верхнего квадрата (северо-западного угла таблицы). Нужно с позиции этого квадрата сравнить количество ресурсов у I поставщика и размер фонда I потребителя (в нашем примере цифры 190 и 120), выбрать меньшую из них и записать в данный квадрат, который с этого момента становится «занятым». Если записанная цифра означает ресурсы поставщика, то необходимо передвинуться вниз по данному столбцу во вторую строку и повторить указанную процедуру (т.е. сравнить оставшуюся неудовлетворенной потребность I потребителя и ресурсы II поставщика и записать меньшую цифру). Если же записанная в левом верхнем квадрате таблицы цифра означает размер потребности I потребителя, как в нашем примере, то необходимо передвинуться вправо от северо- западного угла и повторить ту же процедуру. В данном случае, сравнив оставшиеся ресурсы I поставщика (190-120 = 70) и фонд II потребителя (170), записываем цифру 70 в квадрат первой строки второго столбца и перемещаемся вниз. Сравнив неудовлетворенную потребность 11 потребителя (170-70=100) и ресурсов II поставщика(230), записываем 100 в квадрат второй строки второго столбца и перемещаемся вправо.

Так, продвигаясь шаг за шагом вправо или вниз (а в общем по направлению диагонали таблицы), мы получим исходный вариант прикрепления пунктов назначения к пунктам отгрузки, который выражен в виде таблицы линейного программирования методом потенциалов (табл. 4). Цифры, выделенные жирным шрифтом означают здесь и в дальнейшем количество тонн продукции, намеченной к поставке по рассматриваемому варианту прикрепления.

Таблица 4

Поставщики (i) U_i \ Потребители (j) V_j		I	II	III	IV	V	VI	Ресурсы поставщиков
		2	3	4	3	2	1	
I	0	2 120	3 70	9 4	8 3	10 2	5 1	190
II	1	8 3	4 100	5 130	6 4	9 3	7 4	230
III	—1	11 1	5 2	3 140	2 20	8 1	3 0	160
IV	2	4 4	8 5	7 6	5 100	4 50	3 20	170
V	5	7 7	10 8	6 9	7 8	2 7	6 40	40
Фонды потребителей		120	170	270	120	50	60	790

Как видно, количество заполняемых квадратов таблицы (занятых мест) равно m + n - 1 = 5 + 6 – 1 = 10; нет ни одного кружка, который был бы единственным в строке и в столбце таблицы, а образованная система кружков является вычеркиваемой. Следовательно, исходный вариант удовлетворяет указанным выше требованиям.

При составлении исходного варианта может возникнуть следующее затруднение: сравниваемые величины потребности и ресурсов по соответствующему столбцу и строке могут оказываться равными, так что, записав цифру в соответствующий квадрат таблицы, мы оказываемся перед фактом нарушения условия m + n - 1. Избежать этого можно весьма просто: учитывая, что взаимное расположение в таблице пунктов отгрузки и пунктов назначения безразлично, следует поменять местами смежные строки и столбцы, в отношении которых произошел подобный случай.

По исходному варианту транспортные расходы составляют

120 • 2 + 70 • 3 + 100 • 4 + 130 • 5 + 140 • 3 + 20 • 2 +

+ 100 • 5 + 50 • 4 + 20 • 3 + 40 • 60 = 2960 руб.

Переходим к следующей стадии решения задачи. Необходимо подобрать такие условные числа Ui и V_j (i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), чтобы соблюдалось условие Ui + Vj = $C_{i\,j}$ для всех «занятых» квадратов табл. 4, а именно: $U_1 + V_1 = c_{11}$; $U_1 + V_2 = c_{12}$ и т. д. вплоть до $U_5 + V_6 = c_{56}$. В нашем примере значения U_i и V_j должны быть такими, чтобы $U_1 + V_1 = 2$; $U_1 + V_2 = 3$; $U_2 - V_2 = 4$; $U_2 – V_3 = 5$; $U_3 + V_3 = 3$; $U_3 + V_4 = 2$; $U_4 + V_4 = 5$; $U_4 + V_5 = 4$; $U_5 + V_6 = 6$.

Подбор соответствующих значений Ui и Vj производится следующим образом. Произвольно принимается, что Ui = 0, тогда $V_1 = 2$, так как если $U_1 + V_1 = C_{11}$, то $V_1 = C_{11}$ — U1 = 2 — 0 = 2.

Аналогично определяется значение V_2. Если $c_{12} = 3$, — о, то $V_2 = 3$. Далее, используя значение c_{22} определяется значение U_2. Если $c_{22} = 4$, а $V_2 =3$, то $U_2 = c_{22} - V_2 = 4-3=1$. Затем представляется возможным рассчитать величину V_3, пользуясь значением $c_{23} = 5$ и $U_2=1$, а именно: $V_3 = c_{23} — U_2 = 5—1=4$.

Продвигаясь подобным образом последовательно по всем «занятым» квадратам, нетрудно определить все значения U_i и Vj (см. столбец Ui и строку Vj в табл. 4).

Далее исчисляются значения Ui + Vj и записываются в «свободные» квадраты. Например, $U_2 + V_1 = 1 +2 = 3$; $U_3 + V_2 = -1 +3 = 2$; $U_4 + V_3 = 2+4=6$.

Напомним о значении цифр, содержащихся в табл.4.Во-первых, цифры, выделенные жирным шрифтом - это количество продукции, которое по исходному варианту намечено к поставке. Квадраты таблицы, в которых расположены эти цифры, называются «занятыми». В отличие от них квадраты, не содержащие поставок, носят название «свободных». Во-вторых, цифры, расположенные во внутренних квадратах таблицы, означают транспортные расходы по поставке единицы продукции. Мы обозначаем эти цифры условным индексом C_{11}, где : i — номер поставщика, а j- номер потребителя. Например, $c_{22} = 5$ означает транспортные расходы по поставке единицы продукции от поставщика II к потребителю III.

В-третьих, цифры, расположенные в «свободных» квадратах таблицы, являются вспомогательными и представляют собой сумму соответствующих условных величин Vj и Ui. Будем обозначать эти цифры через c_{ij}. Для «занятых» квадратов эти суммы совпадают по величине с цифрами c_{ij}, указанными во внутренних квадратах таблицы.

Формулируем следующее правило оптимизации: если для всех «свободных» квадратов оказывается, что cij < C_{ij}, то это означает, что достигнут оптимальный вариант прикрепления потребителей к поставщикам. Если же такого условия нет и хотя бы одно из значений c_{ij} больше соответствующего значения Cij, то рассматриваемый вариант не является оптимальным и его можно улучшить. Такое улучшение производится путем перемещения поставки в «свободные» квадраты, для которых Cij> ^{c}ij.

Для перемещения поставки следует выбрать тот «свободный» квадрат, для которого Cij- ^{c}ij — max. В примере максимальная разница приходится на квадрат, расположенный в 5-й строке и в 5-м столбце, Cij- $^{c}{}_{ij}$ = — 1 — 2 = 5. В остальных квадратах эта разница меньше.

Если максимальная разница окажется одинаковой для двух или более «свободных» квадратов, то выбирается один из них произвольно.

Итак, в рассматриваемом примере поставка должна быть перемещена в квадрат 5-й строки 5-го столбца.

Перемещение производится в определенном порядке, с тем, чтобы не были нарушены условия, выраженные в приведенных выше уравнениях.

Для этого необходимо по отношению к избранному «свободному» квадрату образовать связку, т. е. провести замкнутую линию, состоящую из горизонтальных и вертикальных отрезков, таким образом, чтобы одной из вершин образованного многоугольника был сам «свободный» квадрат, а остальные вершины находились бы в «занятых» квадратах.

Рассмотрим «свободный» квадрат, соответствующий c_{55} . Он может быть соединен четырьмя прямыми отрезками с соседними «занятыми» квадратами, как это показано на табл. 4 (рис. 1).

В других случаях «свободный» квадрат может быть соединен с «занятыми» квадратами шестью или белее прямыми отрезками. После образования связки «свободному» квадрату и связанным с ним «занятым» квадратам присваиваем поочередно знаки минус или плюс, начиная со «свободного» квадрата. В приведенном выше примере показана расстановка знаков. Учитывая, что число сторон в образованном многоугольнике всегда четное, направление расстановки знаков безразлично, т.е. их можно расставлять как по ходу часовой стрелки, так и против нее.

Далее, просматриваем те «занятые» квадраты, которым присвоен знак плюс, и выбираем тот из них, в котором содержится наименьшая поставка (в нашем примере 40 т). Это количество тонн подлежит перемещению из каждого квадрата со знаком плюс в каждый квадрат (в том числе и свободный) со знаком минус.

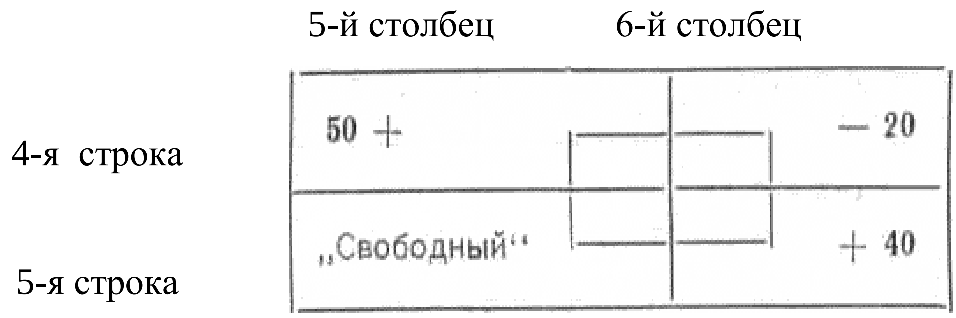


Рис. 1

Вот как будет выглядеть иллюстрируемая часть табл. 5 после осуществления перемещения (рис. 2).

Совершив эту процедуру, мы будем иметь новый вариант прикрепления потребителей к поставщикам, согласно которому транспортные расходы по поставке будут ниже по сравнению с исходным вариантом. В рассматриваемом примере они стали равны 120-2 +70-3 + + 100-4 + 130-5 + 140-3 + 20-2 + 100-5 +50-4 + + 20-3 +40-6 = 2760 руб., или на 200 руб. ниже, чем в исходном варианте.

Законченный цикл вычислений, приводящих к получению нового варианта, называется вычислением отдельной итерации.

В отношении получаемого варианта прикрепления поступают точно так же, как и в отношении исходного варианта, т. е. вычисление очередной итерации осуществляется в такой последовательности.

1. Определяются потенциалы U_i и Vj и записываются в соответствую-

щую строку и столбец таблицы.

2. Исчисляются значения $C_{ij} = U_i + Vj$ для «свободных» квадратов таблицы.

3. Сопоставляются C_{ij} с c_{ij}, находятся случаи, когда $C_{ij} > c_{ij}$, и выбирается тот «свободный» квадрат, для которого C_{ij} превосходит c_{ij} на большее число единиц.

4. Образуется связка избранного «свободного» квадрата с соседними «занятыми» квадратами и проставляются знаки минус или плюс.

	5-й столбец	6-й столбец
4-я строка	10	60
5-я строка	40	„Свободный“

Рис.2

5. Производится перемещение наименьшего количества единиц продукции из «занятых» квадратов со знаком плюс в квадраты со знаком минус.

В результате каждой такой итерации образуется новый вариант прикрепления потребителей к поставщикам с заведомо меньшими транспортными расходами по перевозке. Но наша цель состоит в том, чтобы получить оптимальный вариант прикрепления, т. е. такой, при котором транспортные расходы по перевозке будут не просто меньшими по сравнению с каким-либо предыдущим вариантом, а наименьшими в данных условиях. Поэтому мы должны продолжать вычисление итераций пока не будет достигнуто указанное выше условие, а именно $Cij < c_{ij}$ для всех «свободных» квадратов. Если это условие будет обеспечено, значит, нами найден оптимальный вариант, удовлетворяющий избранному критерию оптимальности. В рассматриваемом примере продолжение расчетов помещается в табл. 5.

Рассмотрение таблицы показывает, что условие $C_{ij} < c_{ij}$ выполнено для всех «свободных» мест, причем в одном случае C_{ij} - c_{ij} (для квадрата 4-й строки 1-го столбца), что означает возможность получения другого равнозначного оптимального варианта. Для этого необходимо осуществить перемещение поставки в данный квадрат по общему правилу. Мы увидим, что общая величина транспортных расходов не изменится, она останется на уже достигнутом минимальном уровне, хотя перед нами будет новый вариант прикрепления потребителей к поставщикам. При данных условиях (размеры ресурсов у поставщиков, размеры фондов потребителей, транспортные расходы по доставке единицы продукции) не существует другого варианта прикрепления потребителей к поставщикам, при котором суммарные транспортные расходы были бы ниже.

В этом смысле найденный вариант прикрепления трех потребителей к трем поставщикам является оптимальным при следующих исходных данных. Ресурсы поставщиков: A_1 = 200; A_2 = 150; A_3 = 250. Фонды потребителей; B_1 = 120; B_2= 180; B_3 = 270.

Конечно, если учитывать и другие условия, то, может быть, стоит этот вариант исправить. Например, нехорошо, что 4-й потребитель прикреплен к двум поставщикам — к 6-му и 5-му, причем от последнего ему предстоит получить незначительное количество продукции (всего 10 т), что может оказаться ниже транзитной нормы и вызовет дополнительные трудности. Все эти и другие вопросы решаются в процессе анализа оптимального варианта.

Таблица 5

Поставщики U \ Потребители V		I	II	III	IV	V	VI	Ресурсы поставщиков
		2	3	4	3	2	1	
I	0	120 $\boxed{2}$	70 $\boxed{3}$	4 $\boxed{9}$	3 $\boxed{8}$	2 $\boxed{10}$	1 $\boxed{5}$	190
II	1	3 $\boxed{8}$	100 $\boxed{4}$	130 $\boxed{5}$	4 $\boxed{6}$	3 $\boxed{9}$	2 $\boxed{7}$	230
III	—1	1 $\boxed{11}$	2 $\boxed{5}$	140 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	1 $\boxed{8}$	0 $\boxed{3}$	160
IV	2	4 $\boxed{4}$	5 $\boxed{8}$	6 $\boxed{7}$	100 $\boxed{5}$	10 $\boxed{4}$	60 $\boxed{3}$	170
V	0	2 $\boxed{7}$	3 $\boxed{10}$	4 $\boxed{6}$	3 $\boxed{7}$	40 $\boxed{2}$	1 $\boxed{6}$	40
Фонды потребителей		120	170	270	120	50	60	

Если задача прикрепления потребителей к поставщикам сформулирована в виде открытой модели, то для ее решения методом потенциалов в таблицу вводят либо дополнительного («фиктивного») поставщика, если потребность превышает ресурсы, либо дополнительного («фиктивного») потребителя, если ресурсы превышают потребность. Транспортные расходы по поставке единицы продукции от «фиктивного» поставщика или до «фиктивного» потребителя принимаются заведомо большими и одинаковыми, чтобы не затруднить поиск оптимального варианта.

Пример. Пусть требуется составить оптимальный вариант

Транспортные расходы заданы табл. 6.

Поскольку суммарные ресурсы превышают потребность, введем «фиктивного» потребителя F с фондом, равным разности между суммарными ресурсами и общим фондом: 600—570 = 30 т.

Таблица 6

Поставщики \ Потребители	I	II	III
I	$c_{11}=3$	$c_{12}=4$	$c_{13}=7$
II	$c_{21}=7$	$c_{22}=2$	$c_{23}=3$
III	$c_{31}=8$	$c_{32}=5$	$c_{33}=4$

Таблица 7

Поставщики U_i \ Потребители V_j		I 3	II 4	III 5	«F» 101	Ресурсы поставщиков
I	0	120 [3]	80 [4]	5 [7]	101 [100]	200
II	—2	1 [7]	100 [2]	50 [3]	99 [100]	150
III	—1	2 [8]	3 [5]	220 [4]	30 [100]	250
Фонды потребителей		120	180	270	30	600

Транспортные расходы на доставку этому потребителю 1 т продукции примем равными 100 руб. от любого поставщика. Приведем расчеты (табл.7, 8).

С точки зрения транспортных расходов целесообразно излишние ресурсы оставить у I поставщика. Аналогично поступают и в том случае, когда фонды потребителей превышают ресурсы. Определяют разницу между ними и в таблицу вводят «фиктивного» поставщика. Такова техника расчетов методом потенциалов.

Таблица 8

Поставщики U_i \ Потребители V_j		I	II	III	«F»	Ресурсы поставщиков
		3	4	5	100	
I	0	3 120	4 50	7 5	100 30	200
II	—2	7 1	2 130	3 20	100 98	150
III	—1	8 2	3 3	4 250	100 99	250
Фонды потребителей		120	180	270	30	600

Пример 1.Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице:

a_i \ b_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

Решение:

Из таблицы видно, что имеется два производителя $S_i, i = 1, 2,$ объем производства в пункте S_1 равен $a_1 = 40$ единиц, а в пункте S_2 равен $a_2 = 50$ единиц. Произведенный продукт потребляется в пунктах $Q_1, Q_2, Q_3,$ и потребность в нем в пункте Q_1 составляет $b_1 = 20,$ в пункте Q_2 $b_2 = 30,$ и в те Q_3 $b_3 = 40$ единиц.

Стоимость перевозок одной единицы (например, тонны) продукта из пункта S_1 в пункт $Q_1,$ равна $c_{11} = 3,$ в пункт $Q_2,$ равна $c_{12} = 5,$ в пункт $Q_3,$

равна $c_{13} = 7$. Стоимость же перевозок одной единицы продукта из пункта S_2 в пункт Q_1, равна $c_{21} = 4$, в пункт Q_2, равна $c_{22} = 6$, в пункт Q_3, равна $c_{23} = 10$.

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij}, - объемы перевозок от i -го поставщика каждому j-му потребителю $i = 1,2, j = 1,2,3$. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

Записываем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Транспортные затраты составляют величину

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} c_{ij} x_{ij} = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{23}x_{22} + c_{23}x_{23}.$$

Таким образом целевая функция задачи равняется сумме произведений всех соответствующих элементов матриц C и X.

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}. \quad (1)$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать минимального значения.

Составим систему ограничений задачи.

Сумма всех перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X равняться запасам второго поставщика:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50$$

Это означает, что запасы поставщиков вывозятся полностью.

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X, должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$
$$x_{12} + x_{22} = 30$$
$$x_{13} + x_{23} = 40.$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью. Необходимо учитывать, что перевозки не могут быть отрицательными: $x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3.$

Математическая модель рассматриваемой задачи записывается следующим образом: найти переменные задачи, обеспечивающие минимум целевой функции (1) и удовлетворяющие системе ограничений (2) и условиям неотрицательности (3).

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 30 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

Пример 2. Пусть имеется некоторый груз, который находится на складах: склад 1, склад 2, ..., склад - это пункты отправления. Груз нужно развести по магазинам: магазин 1, магазин 2, ..., магазин k - это пункты назначения. Необходимо максимально эффективное выполнение работу, т.е. нужно найти такой вариант перевозки, при котором затраты минимальные.

Транспортная задача задается следующей таблицей:

	$B_1 - 50$	$B_2 - 100$	$B_3 - 75$	$B_4 - 75$
$A_1 - 100$	4	3	5	6
$A_2 - 200$	8	2	4	7

В данной таблице, через A_1 и A_2 обозначены два склада с товаром - пункты отправления. На складе A_1 - количество груза равен 100, на складе A_2 -200. B_1, B_2, B_3, B_4- магазины-пункты назначения. Потребности магазинов: для первого B_1 нужен товар объемом 50, для второго 100, для третьего и четвертого по 75. Стоимость перевозок одной единицы груза из склада A_1 в пункты назначения ("магазины"B_1, B_2, B_3, B_4) задаются во второй строке таблицы числами $c_{11} = 4, c_{12} = 3, c_{13} = 5, c_{14} = 6$, в третьей строке приведены цены перевозок единицы груза из склада A_2 в пункты ния $B_1, B_2, B_3, B_4, c_{21} = 8, c_{22} = 2, c_{23} = 4, c_{24} = 7$.

Условия данной задачи можно задать в более понятном виде:

Пункты отправления	Запасы	Пункты назначения и стоимость перевозок одной единицы груза $c_{ij}, i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3, 4$			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7
Потребности		50	100	75	75

Запишем модель данной задачи:

Матрица перевозок: $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix}$

Матрица стоимостей:

$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Учитывая ограничения, заданные в задаче записываем математическую модель:

$$Z(X) = 4x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 6x_{14} + 8x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 7x_{24}. \quad (1')$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 50 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 75 \\ x_{14} + x_{24} = 75 \end{cases} \qquad (2')$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, ; j = 1, 2, 3,4. \qquad (3')'$$

Задачи для самостоятельного решения

расстояния между пунктами отправки получения (км):

Пункты назначения / Пункты отправки	1	2	3
А	1	3	4
Б	2	5	3
В	6	7	4

Решите транспортную задачу распределительным методом. Составьте план перевозок, обеспечивающий наименьший пробег грузов в тонно-километрах.

Задача 2. У вас есть некоторый груз, который находится на складах: склад 1, склад 2, ..., склад - это пункты отправления. Этот груз вам необходимо развести по магазинам: магазин 1, магазин 2, ..., магазин k - это пункты назначения. Транспортная задача задается таблицей

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Найдите такой вариант перевозки, при котором затраты будут минимальными, применив для этого метод северо-западного угла.

III. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО РОГРАММИРОВАНИЕ

3.1 Модели систем массового обслуживания

3.1.1 Основные понятия теории систем массового обслуживания

Системы специального вида, реализующие многократное выполнение однотипных задач, называются системами массового обслуживания (СМО).

Примерами СМО являются системы связи, автозаправочные станции, магазины, парикмахерские, билетные кассы, пункты обмена валюты, ремонтные мастерские, больницы и т.д.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, устанавливающих зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами.

Задачей теории массового обслуживания является установление зависимости результирующих показателей работы системы массового обслуживания от входных показателей.

Результирующие показатели - вероятности того, что заявка будет обслужена; математическое ожидание числа обслуженных заявок и т.д. являются показателями эффективности работы СМО, которые показывают может ли данная система справляться с потоком заявок.

Показатели системы массового обслуживания: количество каналов – количество обслуживающих единиц в системе, параметры входящего потока заявок и т. д.

Время обслуживания и поток заявок носит случайный характер, что может приводить как к перегрузке каналов, так и их недогрузке

Если каналы могут обслуживать одинаковые заявки, то они называются однородными. Совокупность таких каналов называется обслуживающей системой.

Если СМО имеет несколько каналов обслуживания, выполняющие одни и те же услуги, то в системе имеется параллельное обслуживание. Если же каналы являются разнотипными, то заявки должны последовательно пройти через каждый из них.

Основными элементами СМО являются - входной поток требований (заявок) на обслуживание, каналы обслуживания, очередь заявок, ожидающих обслуживания, выходной поток обслуженных заявок, поток не обслуженных заявок, очередь свободных каналов (для многоканальных СМО).

Основные характеристики СМО

1. Среднее время обслуживания каждого требования - $t_{\text{об}},$ случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром μ.

2. Среднее время ожидания в очереди -$T_{\text{очер}} = t_{\text{ож}} = W_{\text{оч}} = W_q$;

3. Среднее время пребывания в СМО $T_{\text{сист}} = W_{\text{сист}} = W_s$;

4. Среднее число заявок (длина очереди) $L_{\text{очер}} = L_q$;

5. Среднее число заявок в СМО $L = L_s$;

6. Количество каналов обслуживания – N=n. Если $n >$ 1, то система называется многоканальной;

7. Интенсивность входного потока заявок λ;

8. Интенсивность обслуживания μ;

9. Интенсивность нагрузки;

10. Коэффициент нагрузки $K_{з}$;

11. Относительная пропускная способность Q;

12. Абсолютная пропускная способность A;

13. Доля времени простоя СМО;

14. Доля обслуженных заявок;

15. Доля потерянных заявок;

16. Среднее число занятых каналов $N_{з}$;

17. Среднее число свободных каналов $N_{\text{св}}$;

18. Коэффициент занятости каналов $K_{\text{з}}$;

19. Коэффициент простоя каналов $K_{\text{пр}}$;

20. $G_{\text{э}}$ - суммарные потери за отчетный период T:

$$G_{\text{э}} = T \cdot (Aq_1 + N_0 q_2 + N_{\text{з}} q_3),$$

где q_1- стоимость потерь, связанных с простаиванием требований в очереди в единицу времени; q_2- стоимость потерь за простой обслуживающего устройства в единицу времени; q_3- стоимость эксплуатации прибора при обслуживании требований в единицу времени. n-количество обслуживающих каналов. Если $n > 1$, то система называется многоканальной. m-количество мест для ожидания заявок в очереди. Если $m = 0$, то СМО с потерями (без ожидания); $m = \infty$ - система с неограниченным ожиданием; $0 < m < \infty$ - система с ограниченным числом мест для ожидания.

Потоки событий

Переходы СМО из одного состояния в другое происходят под воздействием вполне определенных событий - поступления заявок и их обслуживания.

Последовательность однородных событий, появляющихся один за другим в случайные моменты времени, называется **потоком событий**.

Интенсивностью потока событий λ называется среднее число событий, поступающих в систему в единицу времени.

Если вероятность попадания любого числа событий на промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от того, как далеко расположен этот промежуток от начала отсчета времени, то поток событий называется *стационарным.* Интенсивность стационарного потока является постоянной величиной.

Поток, число событий которого, попавших на заданный временной интервал, не зависит от числа событий, попавших на другой называется *потоком событий без последействия.*

Поток событий, в котором вероятность попадания на элементарный временной интервал двух и более событий бесконечно мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, называется *ординарным потоком событий.*

Поток событий, обладающий одновременно свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последствия называется *простейшим (или пуассоновским) потоком событий.*

Поток, получаемый наложением большого числа независимых стационарных и ординарных потоков, интенсивности которых можно сравнивать, получается поток, близкий к простейшему с интенсивностью, равной сумме интенсивностей входящих потоков:

$$\lambda = \sum_i \lambda_i,$$

где λ – интенсивность суммарного потока;

λ_i - интенсивность потока под номером i;

n - общее число складываемых потоков.

Для простейшего (пуассоновского) потока случайные интервалы между заявками имеют экспоненциальное распределение:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

здесь λ - интенсивность потока.

Основная характеристика канала - время обслуживания.

Обычно практики полагают, что время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения:

$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, f(t) = \lambda e^{-\mu t},$

здесь μ - интенсивность обслуживания $\mu = \frac{1}{\bar{\tau}_{обсл}}$; $\bar{\tau}_{обсл}$ - математическое ожидание времени обслуживания.

Значение P_0 определяет вероятность того, что все каналы обслуживания свободны (находятся в состоянии простоя).

Значение P_k определяет вероятность того, что в системе (в очереди и на обслуживании) находятся k заявок. Если k не превышает числа каналов N, то все заявки находятся на обслуживании и очередь отсутствует; в противном случае все каналы заняты и k-N заявок находится в очереди.

Вероятность $P_{\text{отк}}$ отказа в обслуживании определяется ситуацией занятости всех N каналов и всех m мест в очереди и равна $P_{N+m.}$

Среднее число занятых каналов $N_{\text{з}}$ определяется математическим ожиданием дискретной случайной величины

$$N_{\text{з}} = \sum_{k=1}^{N} k \cdot \rho_k + \sum_{k=N+1}^{N+m} N \cdot \rho_k = \rho \cdot \left[1 \cdot \frac{\rho^{N+m}}{N!\,N^m} \rho_0 \right] \tag{1.13}$$

$$N_{\text{св}} = N - N_{\text{з}} \tag{1.14}$$

Коэффициент простоя каналов

$$K_{\text{пр}} = N_{\text{св}}/N \tag{1.15}$$

Коэффициент занятости каналов

$$K_{\text{з}} = N_{\text{з}}/N \tag{1.16}$$

Относительная пропускная способность (доля обслуженных заявок в общем числе поступавших в систему) определяется величиной

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} \tag{1.17}$$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени) определяется величиной

$$A = \lambda Q \tag{1.18}$$

Средняя длина очереди

$$L_{\text{оч}} = \sum_{k=N+1}^{N+m} (k - N) P_k = \frac{\rho^{N+m}}{N! \cdot N} \cdot \frac{1 - (\rho/N)^m (m + 1 - m\rho/N)}{(1 - \rho/N)^2} P_0 \tag{1.19}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, складывается из средних значений занятости каналов и длины очереди

$$L = N_{\text{з}} + L_{\text{оч}} \tag{1.20}$$

Среднее время пребывания заявки в очереди равно

$$T_{\text{оч}} = L_{\text{оч}}/\lambda \tag{1.21}$$

Общее время пребывания заявки в очереди будет складываться из $T_{очер}$ и среднего времени обслуживания

$$T_{сист} = T_{оч} + Q/\mu \qquad (1.22)$$

Полученные характеристики дают возможность анализа замкнутых и разомкнутых систем с отказами (m=0), с очередью или с ожиданием при простейшем входном потоке и однотипных параллельных каналах обслуживания с показательным законом длительности обслуживания (в частности, с фиксированной длительностью).

Классификация систем массового обслуживания.

Любое исследование системы массового обслуживания (СМО) начинается с изучения того, что необходимо обслуживать, следовательно, с изучения входящего потока заявок и его характеристик.

1. В зависимости от условий ожидания начала обслуживания различают:

- СМО с потерями (отказами),

- СМО с ожиданием.

В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и теряются. Классическим примером системы с отказами является телефонная станция. Если вызываемый абонент занят, то требование на соединение с ним получает отказ и теряется.

В СМО с ожиданием требование, застав все обслуживающие каналы занятыми, становится в очередь и ожидает, пока не освободится один из обслуживающих каналов.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований в ней, называются системами *с* ограниченной длиной очереди.

СМО, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются системами с ограниченным временем ожидания.

2. По числу каналов обслуживания СМО делятся на:

- *одноканальные*;

- *многоканальные*.

3. По месту нахождения источника требований СМО делятся на:

- *разомкнутые*, когда источник требования находится вне системы;

- *замкнутые*, когда источник находится в самой системе.

Примером разомкнутой системы может служить мастерская по обслуживанию и ремонту бытовой техники. Здесь неисправные устройства - это источник требований на их обслуживание, находятся вне самой системы, число требований можно считать неограниченным.

К замкнутым СМО относится, например, станочный участок, в котором *станки* являются источником неисправностей, и, следовательно, *источником требований на их обслуживание,* например, бригадой наладчиков.

На рисунке 1 приведена схема классификации СМО.

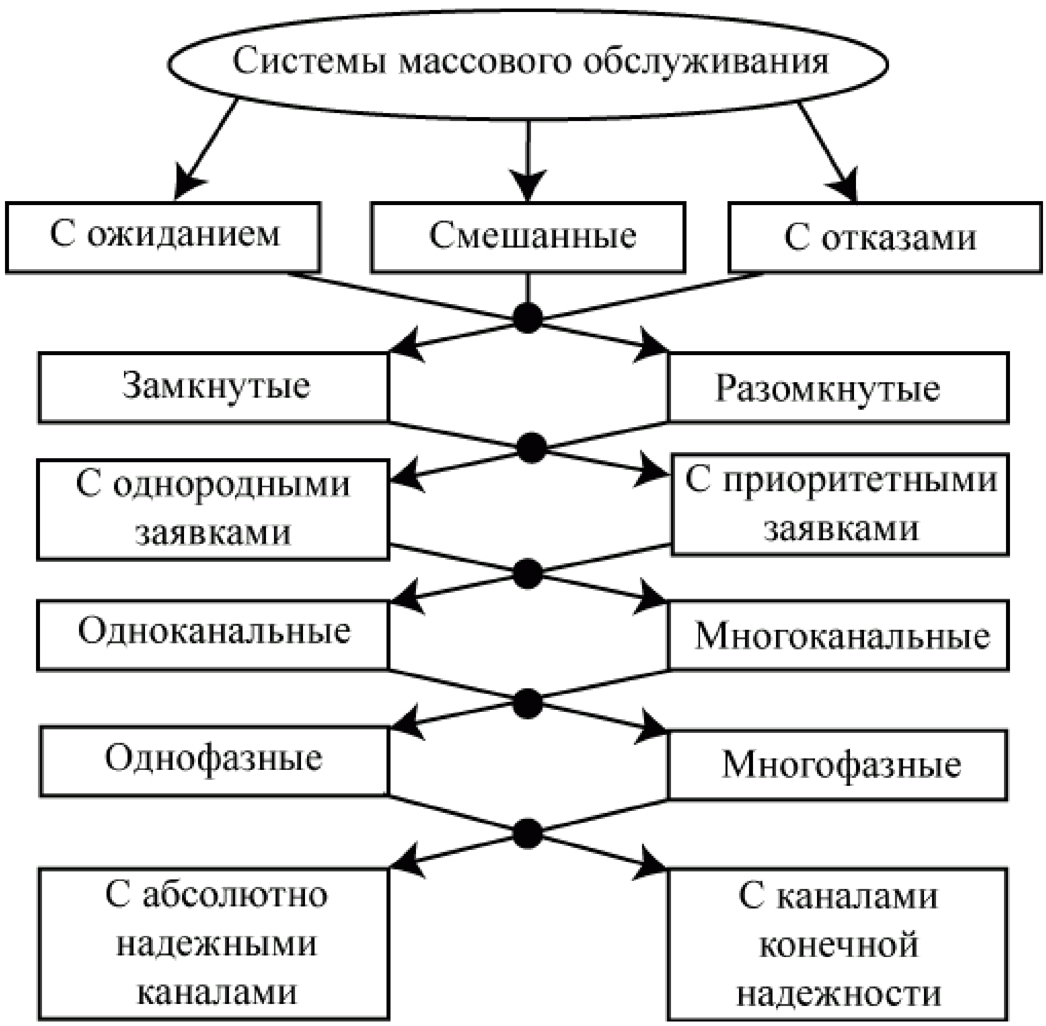


Рис. 1 Классификация СМО

Модели массового обслуживания с ожиданием

Рассмотрим аналитические модели наиболее распространенных СМО с ожиданием, т.е. таких СМО, в которых требования, поступившие в момент, когда все обслуживающие каналы заняты, ставятся в очередь и обслуживаются по мере освобождения каналов.

Общая постановка задачи.

Система имеет **n** *обслуживающих каналов*, каждый из которых может одновременно обслуживать только одно требование.

В систему поступает *простейший (пуассоновский) поток требований с параметром* **λ.** Если в момент поступления очередного требования в системе на обслуживании уже находится не меньше n требований (т.е. все каналы заняты), то заявка становится в очередь и ждет начала обслуживания.

Время обслуживания каждого требования $\boldsymbol{t}_{\text{об}}$. - случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром **μ**.

СМО с ожиданием можно разбить на две большие группы**:** *замкнутые и разомкнутые.*

Расчет характеристик работы СМО различного вида можно провести на основе расчета вероятностей состояний СМО (так называемые формулы Эрланга).

1.Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Пусть на СМО с ожиданием и неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживаний имеет интенсивность μ, обратную среднему времени обслуживания заявки $t_{\text{об}}$.

Граф состояний такой системы представлен на рис. 2

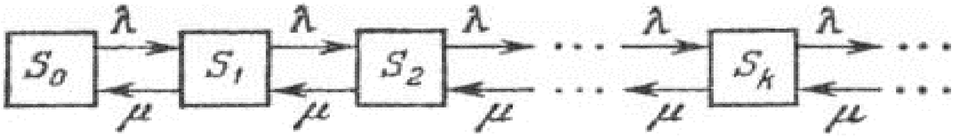


Рис.2

Введем обозначения:

S_0 - состояние, когда канал свободен (не поступило ни одной заявки);

S_1- поступила одна заявка, канал обслуживает, но очереди нет;

S_2- поступили две заявка - одна обслуживается, другая стоит в очереди;

………………………………………………………………………………

S_k- в системе имеются k заявок - одна обслуживается $k-1$ стоит в очереди.

На рис.2 показан процесс гибели и размножения для бесконечного числа состояний. По всем стрелкам поток заявок с интенсивностью λ переводит систему слева направо, а справа налево - поток обслуживаний с интенсивностью μ.

Теорема. Если $\rho = \lambda/\mu < 1$, то есть в единицу времени среднее число пришедших заявок меньше среднего числа обслуженных заявок, то предельные вероятности существуют, если же $\rho = \lambda/\mu > 1$, то очередь растет до бесконечности и предельные вероятности не существуют.

Предельные вероятности состояний системы обслуживания, представленной на графе рис. II.3.1, определяется формулами

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \cdots\right]^{-1} = \qquad (20.11)$$
$$= (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1}$$

В скобках стоит сумма бесконечной геометрическую прогрессии со знаменателем ρ. Если $\rho < 1$, ряд сходится, и сумма ряда равна

$$1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots = \frac{1}{1-\rho}.$$

Предельные вероятности состояния СМО:

$$S_0: \qquad p_0 = 1 - \rho \qquad (20.12)$$

Предельные вероятности $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots \;, \cdots, p_k, \cdots$ для любого состояния S_k заданной системы находятся по формулам:

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \cdots, p_k = \rho^k p_0, \cdots.$$

С учетом (20.12) окончательно найдем:

$$p_1 = \rho(1-\rho), p_2 = \rho^2(1-\rho), \cdots, p_k = \rho^k(1-\rho), \cdots, \quad (20.13)$$

Из (20.13) p_0 наибольшая, это означает, что вероятность того, что канал будет свободен наиболее вероятна.

Найдем значения предельных вероятностей.

Относительная пропускная способность $\boldsymbol{Q}$ определяется по формуле $\boldsymbol{Q = 1 - P}_{\text{отк}}$, но так как длина очереди не ограничена, то любая заявка будет обслужена, то есть $P_{\text{отк}} = 0$ следовательно $\boldsymbol{Q = 1}$.

Абсолютная пропускная способность A определяется по формуле $\boldsymbol{A = \lambda Q}$, но $Q = 1$, тогда $A = \lambda$.

Среднее число находящихся в системе заявок $L_{\text{сист}}$ находится по формуле взвешенного арифметического среднего:

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (20.16)$$

Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$ есть разность среднего числа заявок в системе $L_{\text{сист}}$ и среднего числа заявок, находящихся под обслуживанием $L_{\text{об}}$.

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (20.20)$$

Среднее время пребывания заявки в системе $T_{\text{сист}}$ или в очереди $T_{\text{оч}}$ по формулам Литтла определяются, как среднее число заявок в системе или в очереди, деленному на интенсивность потока заявок. Тогда формулы для определения $T_{\text{сист}}$ и $T_{\text{оч}}$ запишутся в виде:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \quad (20.21)$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \quad (20.22)$$

Все характеристики СМО найдены.

2. $\boldsymbol{n}$ -канальная СМО с неограниченной очередью.

Пусть на n-канальную СМО с неограниченной очередью, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание интенсивностью λ.

Время обслуживания каждого требования - случайное с экспоненциальной функцией распределения и интенсивностью обслуживания μ.

Если все приборы системы заняты и в это время поступает заявка, то она встает в очередь, и ждет, пока канал не освободится. Каждый канал в любой момент времени может обслуживать не более одной заявки. Проанализируем работу СМО.

Нумерация состояний - проводится по числу заявок, находящихся в системе:

S_0 – в СМО заявок нет (все каналы свободны);

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

S_2 - занято два канала, остальные свободны;

………………………………………………………………………

S_k – занято k каналов, остальные свободны;

………………………………………………………………………

S_n - заняты все n каналов (очереди нет);

S_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди;

………………………………………………………………………

S_{n+r} - заняты все n каналов, r заявок стоит в очереди;

………………………………………………………………………

Граф состояний показан на рис.3

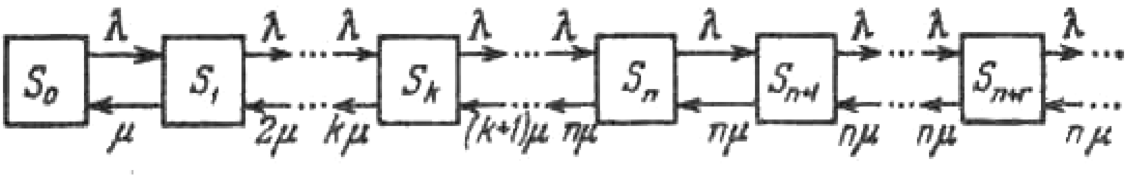


Рис.3

Рис. 3- схема гибели и размножения, с бесконечным числом состояний.

Пусть $\rho/n < 1$ выполнено, и финальные вероятности существуют. Запишем формулы для нахождения финальных вероятностей:

$$\left.\begin{aligned}
p_0 = \left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho}{2!}^2+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}\right)^{-1},\\
p_1=\frac{\rho}{1!}p_0,\cdots,p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\cdots,p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\\
p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0,\cdots,p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (20.22)$$

где p_0 - вероятность того, что все приборы свободны; p_k- вероятность того, что из n приборов занято обслуживанием κ приборов; p_{n+r} – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием и в очереди r заявок.

P - вероятность того, что все приборы системы заняты ($k \geq n$):

$$P=\frac{\rho^n}{(n-1)!\cdot(n-\rho)}\cdot p_0;$$

Характеристики эффективности СМО:

Среднее число занятых каналов $\bar{k}=\lambda/\mu=\rho$;

Среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$:

$$L_{\text{оч}}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}. \qquad (20.23)$$

Среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$:

$$L_{\text{сист}}=L_{\text{оч}}+\bar{k}=\left[\bar{k}=\rho\right]=L_{\text{оч}}+\rho. \qquad (20.24)$$

Средние времена пребывания заявки в очереди и в системе:

$$T_{\text{оч}}=\frac{1}{\lambda}L_{\text{оч}}, T_{\text{сист}}=\frac{1}{\lambda}L_{\text{сист}}. \qquad (20.25)$$

$T_{\text{ож}}$ - среднее время, в течение которого требование ждет начала обслуживания находится по формуле:

$$T_{\text{ож}}=\frac{P}{n\cdot\lambda-\mu}.$$

Системы массового обслуживания с отказами

1. Одноканальная СМО с отказами

Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание поток имеет интенсивность λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных заявок). Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

$\mu = {}^{1}\!/_{t_{\text{об}}}$ – интенсивность обслуживания, $t_{\text{об}}$– среднее время обслуживания одного клиента.

Пусть система работает с отказами. Можно определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Относительная пропускная способность равна доли обслуженных заявок относительно всех поступающих и вычисляется по формуле:

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Эта величина равна вероятности P_0 того, что канал обслуживания свободен.

Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени:

$$A = \lambda q = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}.$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал обслуживания занят»:

$$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Данная величина $P_{\text{отк}}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

2. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

Как и в предыдущем случае СМО имеет один канал, входящий поток заявок на обслуживание поток имеет интенсивность λ, Интенсивность потока обслуживания равна μ. Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения.

СМО не может вместить более N-заявок, из которых одна обслуживается, а (N-1) ожидают. Клиенты, не попавшие в ожидание, покидают систему.

Считается, что источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Обозначим P_n - вероятность того, что в системе находится n заявок. Эта величина вычисляется по формуле

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n, \rho \neq 1, n = 0,1,2,\cdots, N; \\ \dfrac{1}{N+1}, \rho = 1; \end{cases}$$

Здесь $\rho = \lambda/\mu$ - приведенная интенсивность потока. Тогда вероятность того, что канал обслуживания свободен и в системе нет ни одного клиента, равна:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}.$$

С учетом этого можно обозначить

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \rho^n, \rho \neq 1, n = 0,1,2,\cdots, N; \\ \dfrac{1}{N+1}, \rho = 1. \end{cases}$$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1).

Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{\text{отк}} = P_N = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^N, \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{N+1}, \rho = 1. \end{cases}$$

Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \cdot \rho^N, \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{N+1}, \rho = 1. \end{cases}$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = q \cdot \lambda;$$

Среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_{\text{сист}} = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot [1 - (N+1) \cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1}]}{(1-p) \cdot (1 - p^{N+1})}, \rho \neq 1; \\ N/_2, \rho = 1; \end{cases}$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_s}{\lambda(1 - P_N)};$$

Средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$T_{\text{оч}} = T_{\text{сист}} - \frac{1}{\mu};$$

Среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди):

$$L_{\text{оч}} = \lambda(1 - P_n) \cdot T_{\text{оч}}.$$

3. Многоканальная СМО с отказами

На практике в большинстве случаев системы массового обслуживания являются многоканальными, то есть параллельно могут обслуживаться несколько заявок.

Пусть имеется $\boldsymbol{n}$ каналов (линии связи), на который поступает поток заявок с интенсивностью $\boldsymbol{\lambda}$, при этом параллельно может обслуживаться не более $\boldsymbol{n}$ клиентов (заявок). Поток обслуживаний имеет интенсивность $\boldsymbol{\mu}$. Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равняется 1/μ.

Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, при чем длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения.

Целью использования многоканальной СМО является увеличение скорости обслуживания требований по сравнению с одноканальной системой за счет одновременного обслуживания $\boldsymbol{n}$ клиентов.

Для исследования работы СМО необходимо найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:

A - абсолютную пропускную способность, то есть среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени;

$P_{\text{отк}} -$ вероятность отказа, то есть того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\bar{k} -$ среднее число занятых каналов.

Стационарное решение системы имеет вид:

$$P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, k = 0,1, \cdots, n,$$

где

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, k = 0,1, \cdots, n, \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Формулы для вычисления вероятностей называются *формулами Эрланга.*

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме

Пронумеруем состояние системы S (СМО) по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

S_0 – в СМО нет ни одной заявки;

S_1 - в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны);

………………………………………………………………………………

S_k - в СМО находится k заявок (k каналов заняты, остальные свободны);

………………………………………………………………………………

S_n - в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

Вероятность отказа:

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0,$$

так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все каналов заняты. Величина $P_{\text{отк}}$ характеризует полноту обслуживания входящего потока.

Вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (она же – относительная пропускная способность системы) дополняет $P_{\text{отк}}$ до единицы:

$$q = 1 - P_{\text{отк}} - \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}}).$$

Среднее число каналов, занятых обслуживанием $(\bar{k})$ следующее:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{\text{отк}}).$$

Величина $\bar{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho}{2!}^2 + \cdots + \frac{\rho^k}{k!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \cdots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

$$p_0 = (1+\rho)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \quad \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}; \; t_{\text{об}} = \frac{1}{\mu}$$

Решение задач.

Нахождение показателей эффективности работы одноканальной СМО с ограниченной очередью.

Задача1. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов составляет 0,4 судов в сутки. Интенсивность разгрузки судов - 0,5 судов в сутки. Определить показатели эффективности причала, если известно, что судно покидает причал, не разгрузившись, при очереди на разгрузку в три судна и более.

Решение.

Из условия задачи известно, что $\lambda = 0{,}4$ – интенсивность потока судов, $\mu = 0{,}5$ – интенсивность обслуживания одной заявки, в нашем случае это интенсивность разгрузки судов в сутки, $n = 1$- один канал обслуживания, $m = 3$- количество заявок в очереди, то есть длина очереди.

Интенсивность нагрузки канала находится по формуле

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 < 1$$

Предельная вероятность того, что причал пустует, определяется отношением

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-0{,}8}{1-0{,}8^{3+2}} = 0{,}297$$

Вероятность того, что судно покинет причал не разгрузившись, определяется отношением

$$P_{\text{отк}} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0 = 0{,}8^{3+1} \cdot 0{,}297 = 0{,}122$$

Относительная пропускная способность определяется отношением

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} p_0 = 1 - 0{,}122 = 0{,}878.$$

Абсолютная пропускная способность определяется отношением

$$A = \lambda Q = \lambda(1 - \rho^{m+1} p_0) = 0{,}4 \cdot 0{,}878 = 0{,}351.$$

Среднее число судов в очереди найдем по формуле

$$L_{\text{очер}} = \rho^2 \frac{[1 - \rho^m(m + 1 - mp)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)} = 0{,}8^2 \frac{[1 - 0{,}8^3(3 + 1 - 3 \cdot 0{,}8)]}{(1 - 0{,}8^{3+2})(1 - 0{,}8)} = 0{,}86.$$

Среднее время пребывания судна в очереди

$$T_{\text{очер}} = \frac{L_{\text{очер}}}{\lambda} = \frac{0{,}86}{0{,}8} = 1{,}076 \text{ суток.}$$

Среднее число заявок под обслуживанием

$$L_{\text{обсл}} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}297 = 0{,}703$$

Среднее число заявок в системе, то есть среднее число судов, находящихся под разгрузкой и у причала

$$L_{\text{сист}} = L_{\text{очер}} + L_{\text{обсл}} = 0{,}86 + 0{,}703 = 1{,}563.$$

Среднее время пребывания заявки в системе, в нашем случае – это среднее время пребывания судна под разгрузкой и в очереди, найдем по формуле

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{1{,}563}{0{,}8} = 1{,}954 \text{ суток.}$$

Задача 2. Пусть n-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (n=3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ=1 задача в час. Средняя продолжительность обслуживания tоб=1,8 час.

Требуется вычислить значения:

p_k- вероятности числа занятых каналов ВЦ;

$P_{\text{отк}}$- вероятности отказа в обслуживании заявки;

$\boldsymbol{Q}$ - относительной пропускной способности ВЦ;

A - абсолютной пропускной способности ВЦ;

$\bar{k}$- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение.

Определим параметр μ потока обслуживаний:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{об}}} = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555.$$

Приведенная интенсивность потока заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0{,}555} = 1{,}8.$$

Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 1{,}8\, p_0; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 1{,}62 p_0; p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0{,}97 p_0;$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 1{,}8 + 1{,}62 + 0{,}97} \approx 0{,}186;$$

$$p_1 = 1{,}8 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}334; p_2 = 1{,}62 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}301;$$

$$p_3 = 0{,}97 \cdot 0{,}186 \approx 0{,}180;$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки

$$P_{\text{отк}} = p_3 = 0{,}180;$$

Относительная пропускная способность ВЦ

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0{,}180 = 0{,}820.$$

Абсолютная пропускная способность ВЦ:

$$A = q \cdot \lambda = 1 \cdot 0{,}180 = 0{,}820.$$

Среднее число занятых каналов – ПЭВМ

$$\bar{k} = \rho\,(1 - P_{\text{отк}}) = 1{,}8\,(1 - 0{,}180) = 1{,}476.$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех – остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев (Р3= 0,180).

Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ. Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число не обслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,0180. Для этого используем формулу вероятности отказа:

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0$$

Составим следующую таблицу:

n	1	2	3	4	5	6
*P*0	0,357	0,226	0,186	0,172	0,167	0,166
Ротк	0,673	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Анализируя данные таблицы, следует отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях λ и μ до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22%, так как при n = 6 вероятность отказа в обслуживании (*Ротк*) составляет 0,0078.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей $\lambda = 1{,}0$ (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - tоб=1,8 часа.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения: относительной пропускной способности q; абсолютной пропускной способности A; вероятности отказа $P_{\text{отк}}$.

Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Задача 2. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3, то есть $(N - 1) = 3$.

Если все стоянки заняты, т.е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику имеет интенсивность λ=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно $t_{об}$ =1,05 час.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Задача 3. Вспомним о ситуации, рассмотренной в предыдущем примере, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена. Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

1. вероятности состояний системы (поста диагностики);
2. среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);

3. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
4. среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
5. среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

Задача 4. Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, - пуассоновский и имеет интенсивность λ=2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно $t_{об}$= 0,5 сут.

Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы: вероятность состояний системы; среднее число заявок в очереди на обслуживание; среднее число находящихся в системе заявок; среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди; среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

Задача 5. Пусть *n*-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (*n*=3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ=1 задача в час. Средняя продолжительность обслуживания tоб=1,8 час.

Требуется вычислить значения: вероятности числа занятых каналов ВЦ; вероятности отказа в обслуживании заявки; относительной пропускной способности ВЦ; абсолютной пропускной способности ВЦ; среднего числа занятых ПЭВМ. Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

3.2 Игровые методы в экономике

Основные понятия и положения теории игр

Теория игр - это раздел прикладной математики - исследования операций, в которой изучается поведение участников конфликтной ситуации и вырабатываются оптимальные стратегии выбора наилучшего решения для каждого из них, то есть – математическая теория принятия решения в конфликтных ситуациях.

Теория игр занимается математическим моделированием ситуации конфликта и разработкой методов решения задач, возникающих в этих ситуациях. Она дает возможность выработать **оптимальные правила** поведения каждой стороны, участвующей в разрешении конфликтной ситуации.

Конфликтом (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон. При этом ни одна из сторон конфликта не может полностью контролировать положение, так как все участники процесса принимают решение в условиях полной неопределенности.

Конфликт является *антагонистическим*, если интересы участников противоположны *и неантагонистическим*, если интересы не противоположны.

Основной задачей теории игр является не описание, а разрешение конфликтов, т.е. построение компромиссных взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

Предметом изучения теории игр являются конфликтные ситуации.

Для анализа конфликтных ситуаций прибегают к математическому моделированию.

Моделирование – это метод опосредованного познания с помощью объектов - заместителей. Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать невозможно, или же исследование много времени и средств.

Процесс моделирования включает три элемента:

1) субъект исследования (исследователь);

2) объект исследования;

3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Математические модели теории игр (теоретико-игровые модели) имеют свою специфику. Они описывают процессы принятия решений, которые трудно формализовать.

Математической моделью конфликтной ситуации является *игра.*

Если удается формализовать (смоделировать) конфликт и определить принцип оптимальности, т.е. принцип выбора оптимального решения в игре, то получается математическая задача, которую можно решать математическими методами, без учета ее содержательной постановки.

Формальное описание принятия решений удобно разбить на две части:

I) математическая модель конфликтной ситуации или игра - описание конфликтной ситуации, включающее описание субъектов, принимающих решения, их возможностей и интересов;

I I) принцип оптимальности - описание правил рационального поведения игроков.

Математическая модель конфликта и принцип оптимальности дают полное описание принятия решений в условиях конфликта. Оптимальность и не оптимальность того или иного исхода конфликта зависит от интересов и возможностей его участников. В этом смысле принцип оптимальности является функцией игры. Можно рассматривать различные принципы оптимальности, но если один из них выбран, то для каждой игры можно однозначно указать множество ее рациональных исходов.

В теории игр используется разнообразный и хорошо разработанный математический аппарат: теория множеств, теория вероятностей, топология, теория функций, теория дифференциальных уравнений, методы оптимизации, динамическое программирование, оптимальное управление и др.

*Игра (*объект исследования в теории игр) – упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта, тем, что ведется по определенным правилам на основании которых игроки применяют совокупность целенаправленных действий, направленных на достижение собственного выигрыша (цели) в условиях конфликта.

Игрок – это представитель одной из сторон конфликта, который в данной ситуации имеет право принимать решения. При этом сторона конфликта может состоять, как из одного лица, так и из группы лиц, но не каждый участник, может принимать решения, поэтому не каждый член считается игроком.

Для построения модели конфликтной ситуации, прежде всего, должны быть сформулированы правила игры.

Правила игры - совокупность условий, на основе которых определяются возможные варианты действий игроков, то есть множество стратегий, которыми владеет каждый игрок. Правилами игры, так же устанавливаются последовательность ходов, объем информации о поведении сторон, которой может обладать каждый участник игры, результат игры в зависимости от сложившейся ситуации, конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Непосредственный анализ конфликтной ситуации дает возможность установить множество всех возможных вариантов действий каждой стороны конфликта.

В игре каждый игрок делает выбор, то есть из всего множества вариантов действия он выбирает один, который, по его мнению, является лучшим в данной конкретной ситуации и осуществляет его с помощью хода.

Ход является действием одного из игроков в какой-то момент игры. Ход делается каждым игроком на определенном этапе игры. Этап определяется правилами игры, при этом, если возможно учитывается информация о прошлом развитии игры.

Ход - выбор одного из возможных вариантов действий в процессе игры.

Ходы делятся на личные и случайные.

Личным называется ход, когда игрок сам сознательно выбирает из множества возможных вариантов действий один конкретный вариант и осуществляет его (например, любой ход в игре шашки).

Случайным называется ход, если выбор из множества возможных вариантов действий делается не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Дискретный ход является результатом выбора из заданного, ограниченного числа альтернатив (известно число альтернатив и известны численные характеристики этих альтернатив).

Непрерывный ход является результатом непрерывного во времени выбора из неограниченного числа альтернатив.

Агрессивно-нелогичный ход – сознательное снижение собственного выигрыша, приводящее к ещё большим потерям у противника. Цель такого

поведения: вывести противника из игры. Нелогичность здесь в том, что противник не ожидает, что мы поступим себе во вред.

Партией называется множество всех ходов, сделанных игроками от начала до конца игры.

Стратегия – упорядоченная по шагам игры совокупность тактик игрока при переходе из начального в конечное состояние процесса игры. При этом последовательность ходов зависит от информации о ходах другого (других) игрока (игроков) и от информации о случайно изменяющихся параметрах, законы распределения которых, считаются заданными.

В теории игр *стратегия* игрока в игре или деловой ситуации - это полный план действий при всевозможных ситуациях, способных возникнуть. Стратегия определяет действие игрока в любой момент игры и для каждого возможного течения игры, способного привести к каждой ситуации.

То есть *стратегия* - это совокупность правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры.

Тактика – локализованный вариант реализации выбранной стратегии.

Примечание. В одноходовой игре понятие тактики и стратегии совпадают. При неоднократном повторении одноходовой игры появляется возможность формирования стратегии.

Чистая стратегия даёт полную определённость, каким образом игрок продолжит игру. В частности, она определяет результат для каждого возможного выбора, который игроку может придётся сделать.

Пространством стратегий называют множество всех чистых стратегий, доступных данному игроку.

Смешанная стратегия является указанием вероятности каждой чистой стратегии. Это означает, что игрок выбирает одну из чистых стратегий в соответствии с вероятностями, заданными смешанной стратегией. Выбор осуществляется перед началом каждой игры и не меняется до её конца. Каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, когда вероятность одной из чистых стратегий равна единице, а остальных возможных чистых стратегий - нулю.

Стратегия, обеспечивающая при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш данному игроку, независимо от стратегий, применяемых другими игроками, называется **оптимальной**.

Набор стратегий - стратегии для каждого из игроков, которые полностью описывают все действия в игре. Набор стратегий обязан включать одну и только одну стратегию для каждого игрока.

Устойчивым (равновесным) решением игры является такое решение, для которого соответствующие стратегии образуют ситуацию, которую ни один из игроков не заинтересован изменить.

Коалиция – совокупность игроков ($N \geq 2$), объединённых по некоторому признаку, например, имеющих общую цель.

Кооперация – понятие, включающее как наличие коалиции, так и обмен информацией в процессе игры и (или) до её начала.

Множество ходов, которые были совершены каждым игроком согласно выбранной ими стратегии, называется ситуацией игры.

Ситуация игры - это модель конкретной обстановки, которая является результатом определенных действий, выбранных игроками.

Ситуация, определяющая исход игры называется **заключительной.**

Для заключительной ситуации всегда определяется конкретное значение критерия эффективности.

Правило, ставящее каждой заключительной ситуации величину критерия эффективности, называется *функцией выигрыша*. Это означает, что каждое ее значение можно представить, как выигрыш, получаемый игроком в зависимости от сделанных ходов.

Исходом игры называется значение функции выигрыша (платежной функции), которая может задаваться в матричном или аналитическом виде.

Величина выигрыша зависит, как от действия игроков, так и от факторов, которыми они не могут управлять. Такими факторами являются природные условия, стоимость имеющихся в распоряжении игроков сил и средств, их количество и так далее.

Функция выигрыша в игре считается заданной.

Классификация игр

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения.

Отметим основные направления, по которым осуществляется классификация игр: количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрышей, количество ходов, состояние информации.

По количеству игроков игры делятся на игры: одного игрока, двух игроков, *n* игроков. В теории игр не рассматриваются игры одного игрока (типа пасьянсов).

Если в игре участвуют два игрока, то игра называется парной.

Если в игре участвуют более двух игроков, то игра называется множественной.

Наиболее изучены и распространены парные игры. В изучении этих игр достигнуты наибольшие успехи, и в практических приложениях.

Менее изучены игры трех и более игроков, так как с увеличением количества игроков увеличиваются трудности, возникающие при их решении. В отличии, от парных игр в множественных играх игроки могут образовывать коалиции постоянные и временные.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

Если в игре каждый игрок имеет конечное число возможных стратегий, то игра называется конечной.

Если в игре хотя бы один игрок имеет бесконечное множество возможных стратегий, то игра называется *бесконечной.*

То есть понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий.

Стратегическими называются игры, состоящие из случайных и личных ходов, или только из личных ходов.

По количеству ходов игры делятся на одноходовые (одношаговые), многоходовые (многошаговые).

Игра называется *одноходовой игрой*, если каждый игрок выбирает один вариант действия из совокупности всех возможных, делает ход и после этого наступает заключительная, финальная ситуация, то есть партия.

Игра называется *многоходовой (многошаговой),* если в процессе игры у каждого игрока имеется по крайней мере по два выбора из множества всех возможных действий и эти выборы он может осуществить при помощи ходов, после каждого хода, сделанного игроками наступает ситуация игры, но по крайней мере первая ситуация не является финальной. Таким образом, многоходовая игра, состоящая из ряда последовательных этапов, наступающих после хода, сделанного каждым игроком, развивается во времени.

Многоходовые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

Позиционная игра – это игра, в которой каждый из игроков последовательно во времени делает ход. В зависимости от применяемых стратегий получают исход игры, где определяются выигрыши игроков.

Существуют методы в теории игр, используя которые позиционную игру можно привести к матричной, что упрощает решение игры. Так как, для решения позиционной игры, приведенной к матричной форме, применяются методы решения матричных игр.

В зависимости от информации, которой обладают игроки игры, делятся на игры с полной и не полной информацией.

В игре с *полной информацией* игроки знают все предыдущие выборы, сделанные каждым игроком.

В игре с *не полной информацией* игрокам не все известно о предыдущих выборах, сделанных каждым игроком.

В зависимости от отношения каждого из игроков к значению функции выигрыша игры подразделяются на *антагонистические и неантагонистические.*

В антагонистических играх интересы ее участников прямо противоположны. Это означает, что, сколько один игрок выиграл, то столько же другой проиграл. Отсюда эти игры иногда называют играми с нулевой суммой или нулевыми играми.

В неантагонистических играх игроки преследуют разные, но не прямо противоположные цели. Отсутствие антагонизма в смысле "равенства значений функций выигрыша по величине и противоположности по знаку" приводит к одному из классов неантагонистических игр, называемому биматричными играми.

По характеру взаимоотношений игроков игры делятся на бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Бескоалиционными называются игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Коалиционными называются игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками.

По виду функций выигрышей игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра - это конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец - номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Биматричная игра - это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой.

Непрерывной игра - это игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий (естественно считается, что стратегии выражены числами из определенного отрезка). Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Выпуклая игра – это игра, функция выигрышей которой является выпуклой.

Сепарабельная (разделимая) игра – это игра, функция выигрышей которой может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента.

Способы задания игры

В теории игр для описания игр используют нормальную и экстенсивную (позиционную) форму, то есть нормативный и позитивный подход.

При изолированном поведении игроков, действующих самостоятельно, не обмениваясь информацией, центральное место, занимают игры в нормальной форме. Здесь рассматриваются принципы оптимальности, естественные при изолированном поведении (различные виды доминирования, принцип гарантированного результата), а также антагонистические игры с седловой точкой, для которых изолированное поведение является единственно разумным.

Игрой в нормальной форме называется совокупность

$$\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N} \rangle,$$

где $N = \{1,2,\cdots,n\}$ - множество игроков; X_i - множество стратегий i -го игрока; H_i- функция выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств, стратегий игроков

$$X = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$$

(множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.

В игре, заданной в нормальной форме игроки не обладают никакой дополнительной информацией о действиях друг друга. Поэтому можно считать, что все игроки одновременно и независимо осуществляют выбор своих стратегий, т.е. элементов $x_i \in X_i, i = 1,2,\cdots,n.$ В результате формируется ситуация $x = (x_1 , \ldots , x_n), x_i \in X_i.$ После этого каждый игрок i получает рыш $H_i(x)$. На этом игра заканчивается.

Если множества чистых стратегий игроков X, конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.

Позиционная форма игры

Нормальная форма игры описывает статическое взаимодействие игроков, не предусматривая возможности последовательных ходов, накопления информации о действиях соперника и повторяющегося взаимодействия. Для моделирования этих аспектов используется развернутая форма игры.

Если в игре игроки могут иметь по несколько ходов, то такие игры называются позиционными или играми в развернутой форме.

Для описания позиционной игры устанавливают последовательность личных и случайных ходов; выборы, которые могут делать игроки при каждом личном ходе; исходы случайных ходов и распределение вероятностей этих исходов; информацию, доступную игрокам при выполнении личного или случайного хода; правила окончания игры и подсчеты выигрыша игроков.

В общем случае, оно зависит от последовательности выборов, исходов при этом правила должны гарантировать, что игра, в конце концов, закончится.

Правила устанавливают вид первого хода. От вида хода зависит процесс игры, который заключается в последовательном переходе от одной позиции к другой. Если ход личный, то игроки выбирают возможные альтернативы согласно правилам игры. Если ход случайный, то выбор альтернатив производится случайным образом. Правилами, при этом устанавливаются возможные альтернативы и вероятности их выбора.

Так как, процесс позиционной игры - это переход от одной позиции к другой, то совокупность позиций называется деревом игры.

Некооперативная игра в развернутой форме с множеством игроков I{\displaystyle \ I} представляется с использованием ориентированного дерева (дерева игры) следующим образом.

Вершины дерева представляют собой *состояния (позиции),* в которых может оказываться игра, ребра - *ходы,* которые могут использовать игроки. Предполагается, что в каждой позиции может совершать ход не более одного игрока. Выделяется три вида позиций в игре:

- *начальная,* представляемая корнем дерева (вершиной, не имеющей входящих ребер);
- *промежуточные*, имеющие входящие и выходящие ребра;
- *терминальные,* имеющие только входящие ребра.

Начальная и промежуточные позиции образуют множество *нетерминальных* позиций.

Для каждой вершины дерева v{\displaystyle \ v}, соответствующей нетерминальной позиции, определен игрок $i,${\displaystyle \ i} совершающий в ней ход и множество ходов этого игрока S_v{\displaystyle \ S_{v}}. Каждому ходу $s \in S_v$ {\displaystyle \ s\in \ S_{v}} соответствует ребро, выходящее из вершины v{\displaystyle \ v}.

Для каждой вершины v{\displaystyle \ v}, соответствующей терминальной позиции, определены функции выигрыша всех игроков{\displaystyle \ H_{i}(v)} $H_i(v)$.

Игра предполагает следующий порядок разыгрывания:

1. Игра начинается из начальной позиции.

2. В любой нетерминальной позиции v{\displaystyle \ v} игрок, имеющий в ней право хода, выбирает ход $s \in S_v$ {\displaystyle \ s\in \ S_{v}} в результате чего игра попадает в следующую позицию, в которую входит ребро, соответствующее ходу s. Если эта позиция является нетерминальной, то повторяется п. 2.

3. Если игра попадает в терминальную позицию $v,$ {\displaystyle \ v} то все игроки получают выигрыши $H_i(v)$ {\displaystyle \ H_{i}(v)}, и игра завершается.

Для учета несовершенства информации, имеющейся у игроков, нетерминальные вершины могут объединяться в информационные множества.

Информационное множество в теории игр - множество позиций в игре в развернутой форме, которые неразличимы между собой для игрока, совершающего в них ход, в связи с неполнотой информации о действиях других участников игры. Игры с информационными множествами, содержащими более одного элемента, называют *играми с несовершенной информацией.* В противном случае говорят об *играх с совершенной информацией.*

Если несовершенство информации вызвано тем, что участник в ходе игры "забывает" свои собственные действия, говорят об *играх с несовершенной памятью.*

Свойства позиций, входящих в информационное множество:

1. Во всех позициях из одного информационного множества право хода принадлежит одному и тому же игроку.
2. Наборы допустимых ходов во всех позициях из одного информационного множества одинаковы.
3. Если игрок выбирает некоторый ход в одной из позиций информационного множества, то он должен выбрать этот же ход и в остальных позициях.

Конечной позиционной игрой называется система

$$\Gamma = \langle I, X, K, \{P_x\}_{x \in X_0}, \{K_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I - множество игроков ($|I| = n$); X- конечное дерево, вершины которого называются позициями, а корень - начальной позицией.

Для позиций естественно определяется отношение следования: позиции, непосредственно следующие за данной $x \in X$, называются альтернативами x; позиции, не имеющие альтернатив, называются окончательными, а ведущие в них пути - партиями; множество окончательных позиций обозначается X^*; K - разбиение множества XX^* на $n+1$ множеств очередности $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

В позициях из $X_i, i > 0,$ ход осуществляется игроком i, в позициях из X_0 - случайно; P_x - вероятностные распределения на множествах альтернатив каждой позиции $x \in X_0$; $K_i = \{U_1^i, U_2^i, \cdots, U_{m_i}^i\}$ - разбиение го $X_i, i > 0$.

Предполагается, что все позиции x из данного U_k^i имеют одинаковое число альтернатив и никакие две из них не следуют друг за другом; множества U_k^i называется информационными.

Между альтернативами всех позиций одного информационного множества установлено однозначное соответствие, и каждый его класс называется альтернативой самого информационного множества; h_i - функция, которая ставить в соответствие каждой окончательной позиции выигрыш в ней игрока i.

Чистой стратегией игрока i в позиционной игре является функция, ставящая в соответствие каждому информационному множеству U_k^i некоторую его альтернативу.

Набор n чистых стратегий всех игроков составляет ситуацию. Процесс игры в условиях сложившейся ситуации можно понимать, как случайное блуждание по множеству позиций от начальной позиции к окончательной, причем в каждой позиции игрок, множеству очередности которого принадлежит эта позиция, знает лишь содержащее ее информационное множество и выбирает альтернативу в соответствии со своей стратегией. В позициях из X_0 выбор альтернативы случаен. Это случайное блуждание определяет вероятностное распределение на множестве окончательных позиций.

Принимая за выигрыш игрока математическое ожидание его выигрыша на окончательных позициях, получают бескоалиционную игру в нормальной форме. Задание позиционной игры в виде дерева

Позиционные игры удобно задавать графически в виде дерева игры. Дерево состоит из вершин, соединенных между собой ветвями. Вершины дерева называют еще позициями игры, а его ветви - ходами игрока.

Основными свойствами дерева игры являются:

- дерево содержит одну единственную начальную вершину (“корень” дерева), в которую не входит ни одна ветвь;

- дерево имеет не менее одной вершины, из которой не выходит ни одна ветвь. Эти вершины называются конечными вершинами;

- из корня дерева имеется единственный путь к каждой из остальных вершин дерева.

Вершина соответствует определенному состоянию игры перед очередным ходом. Каждую вершину занимает только один игрок, и ей присваивается номер, равный номеру игрока, который делает выбор.

Вершины, соответствующие случайным ходам, обозначают номером 0. Ветви, выходящие из вершины, изображают выборы, которые могут быть сделаны игроком при данном ходе. Вероятности выполнения случайного хода записывают у соответствующих ветвей.

Возле конечных вершин дерева указываются исходы игры - значения выигрыша игроков (а в антагонистических играх – выигрыш первого игрока).

Партия начинается с корня (нижней вершины). Каждый ход есть изменение позиции, соответствующее перемещению из одной вершины на какую-нибудь из примыкающих верхних вершин. Число ветвей у вершины равно числу вариантов хода.

Партия заканчивается при достижении одной из конечных вершин. Величина λ называется длиной дерева.

В зависимости от выбора игроков возможно столько различных партий игры, сколько конечных вершин у дерева.

Очевидно, если в игре нет случайных ходов, и каждый из игроков выбрал свою стратегию, то исход игры однозначно определен.

Для игры со случайными ходами, результат партии становится случайной величиной, поэтому необходимо случайные выигрыши заменить их математическими ожиданиями. Как совокупность всех решений, которые должен принять игрок, можно описать как одно решение - выбор стратегии, так и совокупность случайных ходов, может быть заменена одним случайным испытанием H.

Стратегическая игра Г двух игроков

Бескоалиционная игра Г, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц.

Для задания игры в нормальной (или стратегической) форме нужно определить:

1. Список игроков.

2. Для каждого игрока задать список (множество) стратегий.

3. Для каждого профиля стратегий указать профиль платежей (выигрышей) игроков.

Стратегическая игра описывается набором правил. Правила ясно указывают, что допускается делать игроку при всех возможных обстоятельствах. Правила определяют сведения, которые получает каждый игрок. Если в игре требуется применять случайный механизмы, то правила описывают, как нужно истолковывать случайные события. Они устанавливают также момент окончания игры, сумму которую уплачивает или получает каждый игрок, и цель каждого игрока.

Из правил можно узнать такие общие характеристики игры, как число ходов, число игроков и платеж. Игра является конечной, если каждый игрок имеет конечное число ходов и на каждом ходе конечное число выборов.

Нормальная форма игры определяется системой

$$\Gamma = \langle X_1, X_2, H_1, H_2, \rangle$$

где X_1 - множество стратегий первого игрока, X_2 - множество стратегий второго игрока, $X_1 \times X_2$ – множество ситуаций игры, а $H_1 : X_1 \times X_2 \to R^1$, $H_2 : X_1 \times X_2 \to R^1$ − функции выигрыша соответственно 1 и 2 игроков.

Пусть первый игрок имеет в своем распоряжении стратегии x из множества стратегий $X_1 = X$, а второй игрок - стратегии y из множества гий $X_2 = Y$.

Будем рассматривать игру в нормальной форме. Это означает, что игроки выбирают и реализуют свои стратегии одновременно, не зная выбора партнера. Выбранные игроками стратегии образуют исход игры (x, y).

Пару стратегий $(x,\ y)$ будем называть ситуацией. Выигрыш первого игрока описывается функцией $H_1 = F(x, y)$, называемой функцией выигрыша, а у второго - функция выигрыша $H_2 = G(x, y)$ Эти функции определенны на множестве всех ситуаций: $X \times Y$.

$$H_1: X_1 \times X_2 = X \times Y \to R^1, H_2: X_1 \times X_2 = X \times Y \to R^1 -$$

Таким образом, игра двух лиц в нормальной форме задается набором $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$.

Каждый игрок, в данной игре стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Задача первого игрока состоит в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $x \in X$ максимизировать свою функцию выигрыша: $H_1 = F(x, y)\,, \max\limits_{x \in X}\{F(x, y)\}$, а задача второго игрока – в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $y \in Y$ максимизировать свою функцию выигрыша: $H_2 = G(x, y), max_{y \in Y}\{G(x, y)\}$

Для корректного анализа игры, принимаются еще два предположения, называемые гипотезой полной информированности и гипотезой о рациональном (разумном) поведении игроков.

Гипотеза полной информированности игроков. Каждому игроку точно известны как все возможные его собственные стратегии, так и все возможные стратегии другого игрока, а также его собственная функция выигрыша и функция выигрыша другого игрока.

Таким образом, единственное, что может быть в игре, неизвестно игрокам – это какую именно из своих стратегий выберет и реализует другой игрок.

Гипотеза полной информированности является существенной идеализацией реальности. На практике, как правило, игроки не знают даже всех своих возможностей, и тем более возможностей другого игрока. Кроме того, каждый игрок не знает точно своей функции полезности, не говоря уже о функции полезности другого игрока.

Гипотеза о рациональном поведении игроков. Все интересы игрока в игре выражаются его функцией выигрыша и только ею. Иначе говоря, каждый игрок стремится к максимуму своей функции полезности (выигрыша), и из двух исходов выберет тот, который дает ему больший выигрыш.

Данная гипотеза так же, является идеализацией реальности, она характеризуется, как постулат о разумном поведении игроков, исключающий возможность иррационального поведения игроков и принятия ими иррациональных решений, т.е. импульсивных, спонтанных, неизвестно на каких соображениях, основанных. Согласно этой гипотезе игроки полностью описываются своими функциями выигрыша, а в остальном их характеризуют допущение о знании, и допущение о разумности.

Ситуации равновесия в играх двух лиц

Равновесие Нэша - ключевое понятие тории игр. Так называется набор стратегий в игре для двух и более игроков, в котором ни один участник не может увеличить выигрыш, изменив свою стратегию, если другие участники своих стратегий не меняют.

Такая совокупность стратегий, выбранных участниками, и их выигрыши называются равновесием Нэша. Игра может иметь равновесие Нэша в чистых стратегиях или в смешанных (то есть при выборе чистой стратегии стохастически с фиксированной частотой). Нэш доказал, что если разрешить смешанные стратегии, тогда в каждой игре n игроков будет хотя бы одно равновесие Нэша.

Если в игре каждый из противников применяет только одну и ту же стратегию, то про саму игру в этом случае говорят, что она происходит в чистых стратегиях, а используемые игроком А и игроком В пара стратегий называются чистыми стратегиями.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) называется ситуацией равновесия (равновесием по Нэшу) игры Г, если

$$\max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0), \ max_{x \in X} G(x^0, y) = G(x^0, y^0), \qquad (2.1)$$

где $H_1 = F(x, y)$- функция выигрыша первого игрока, а $H_2 = G(x, y)$ - функция выигрыша второго игрока. Эти функции определенны на множестве всех ситуаций: $X \times Y$.

Стратегии x^0 и y^0 , составляющие ситуацию равновесия, будем называть равновесными. Если оба игрока придерживаются ситуации равновесия, то одному игроку невыгодно от нее отклоняться.

Определение. Стратегия игрока, входящая хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу, называется равновесной стратегией.

Рассмотрим понятие равновесия по Нэшу с точки зрения нормативного подхода. Тогда правило принятия решения можно сформулировать следующим образом: в конфликтной ситуации, описываемой игрой в нормальной форме, каждому участнику следует использовать стратегию, которая входит в равновесие по Нэшу.

В антагонистической игре понятие решения связывается с седловой точкой функции выигрыша первого игрока. В произвольной игре двух лиц аналогом седловой точки является понятие ситуации равновесия.

Ситуация равновесия в произвольной игре двух лиц может не обладать теми свойствами, которые свойственны ситуации равновесия в антагонистической игре, то есть для седловой точки.

В антагонистической игре, имеющей решение, компоненты седловой точки являются максиминной и минимаксной стратегиями игроков и, наоборот, любая пара таких стратегий образует седловую точку. Таким образом, в антагонистической игре принцип равновесия согласуется с принципом оптимизации игроками своих гарантированных результатов. Кроме того, во всех седловых точках выигрыш первого игрока один и тот же и равен значению игры. В общем случае ситуация равновесия не обладает указанными свойствами.

Дадим определение ситуации, оптимальной по Парето.

Определение. Ситуация (x^0, y^0) игры Г называется оптимальной по Парето, если не существует такой ситуации (x, y) что выполнены неравенства

$$F(x,y) \geq F(x^0,y^0), G(x,y) \geq G(x^0,y^0) \qquad (2.4)$$

Доминирующие стратегии

Стратегия A_i игрока называется строго доминирующей, если выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_i, строго больше, чем выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_l. Если у игрока есть строго доминирующая стратегия, то есть все основания полагать, что он выберет именно ее. Ему не нужно думать о том, что выберут остальные игроки – его выигрыш максимален. Если у обоих игроков есть строго доминирующие стратегии, то можно быть уверенным, что будет сыгран профиль, состоящий из этих стратегий. Такой профиль называется равновесием в строго доминирующих стратегиях.

Стратегия A_iигрока называется слабо доминирующей, если выигрыш, который он получает, выбирая стратегию A_i, больше или равен выигрышу, который он получает, выбирая стратегию A_l. Строго доминирующая стратегия всегда является слабо доминирующей. Обратное утверждение не верно.

Рассмотрим матричную игру и ее решение в чистых и смешанных стратегиях. Для корректного анализа игры, принимаются два предположения, называемые гипотезой полной информированности и гипотезой о рациональном (разумном) поведении игроков.

Гипотеза полной информированности игроков. Каждому игроку точно известны как все возможные его собственные стратегии, так и все возможные стратегии другого игрока, а также его собственная функция выигрыша и функция выигрыша другого игрока.

Таким образом, единственное, что может быть в игре, неизвестно игрокам – это какую именно из своих стратегий выберет и реализует другой игрок.

Гипотеза о рациональном поведении игроков. Все интересы игрока в игре выражаются его функцией выигрыша и только ею. Иначе говоря, каждый игрок стремится к максимуму своей функции полезности (выигрыша), и из двух исходов выберет тот, который дает ему больший выигрыш.

Определим игру двух лиц. Бескоалиционная игра Г, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц.

Нормальная форма игры определяется системой

$$\Gamma = \langle X_1, X_{\ 2}, H_{\ 1}, H_2, \rangle$$

где X_1 - множество стратегий первого игрока, X_2 - множество стратегий второго игрока, $X_1 \times X_{\ 2}$ – множество ситуаций игры, а $H_{\ 1}: X_1 \times X_{\ 2} \rightarrow R^1$, $H_{\ 2}: X_1 \times X_{\ 2} \rightarrow R^1 -$ функции выигрыша соответственно 1 и 2 игроков.

Матричная игра - это конечная антагонистическая игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец - номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Матричная игра является стратегической, так как неопределенность имеет стратегическое происхождение, то есть неопределенность исходит от противной стороны. Так же матричная игра является одноходовой, так как каждый игрок выбирает один вариант действия из совокупности всех возможных, делает ход и после этого наступает заключительная, финальная ситуация, то есть партия. В матричной игре каждый из игроков имеет конечное число стратегий, следовательно, она является конечной.

В матричной игре игроки действуют изолированно и самостоятельно, не обмениваясь информацией, поэтому эта игра задается в нормальной форме и в основном применяется принцип оптимальности - принцип гарантированного результата.

Решение матричной игры в чистых стратегиях

Пусть в игре участвуют два игрока. Игрок A имеет m стратегий, а рок B имеет n стратегий. Множество стратегий игрока A обозначим рез $X = \{A_1, \cdots, A_m\}$, а стратегии игрока B через $Y = \{B_1, \cdots, B_n\}$.

Так как игра задается в нормальной форме, то игроки выбирают и реализуют свои стратегии одновременно, не зная выбора партнера. Если игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B стратегию B_j, то наступит ситуация ры (A_i, B_j).

Декартовое произведение $X \times Y = \{(A_i, B_j),$ где $i = 1,2, \cdots, m; j = 1,2, \cdots, n;\}$ дает множество всех возможных ситуаций в данной игре. Выбранные игроками стратегии образуют исход игры(A_i, B_j)

По правилам игры для каждого игрока известна платежная функция и значения этих функций в каждой ситуации игры. Выигрыш первого игрока описывается платежной функцией $H_A = F(A_i, B_j)$, называемой функцией выигрыша, а у второго - функция выигрыша $H_B = G(A_i, B_j)$. Эти функции определенны на множестве всех ситуаций $X \times Y$. Функции H_A и H_B каждой ситуации игры ставят в соответствии действительное число: $H_A: X \times Y \to R^1$, $H_B: X \times Y \to R^1$

Таким образом, матричная игра в нормальной форме задается набором $\Gamma = \langle X, Y, F(A_i, B_j), G(A_i, B_j) \rangle$.

Пусть значение платежной функции H_A первого игрока в ции(A_i, B_j) равна a_{ij}, то есть $H_A = F(A_i, B_j) = a_{ij}$, а значение платежной функции H_B второго игрока равна b_{ij}, то есть $H_B = G(A_i, B_j) = b_{ij}$. В матричной игре выигрыш первого игрока A равен проигрышу второго игрока B, то есть $F(A_i, B_j) = -G(A_i, B_j)$, следовательно

$$a_{ij} = -b_{ij}. \qquad (1)$$

Поэтому при анализе такой игры достаточно рассмотреть выигрыш только одного игрока, например, выигрыш a_{ij} первого игрока A, тогда выигрыш второго игрока определяется по формуле (1).

Если известны все значения a_{ij} для каждой ситуации игры (A_i, B_j), где $i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$; то их удобно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы стратегиям игрока B.

Эту таблицу называют *платежной матрицей (матрицей эффективности, матрицей игры).* Такую игру еще называют игрой $m \times n$.

Составим платежную матрицу игры $m \times n$.

$$\begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Каждый игрок, в данной игре стремится, по возможности, максимизировать свою функцию выигрыша. Задача первого игрока состоит в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $A_i \in X$ максимизировать свою функцию выигрыша:

$H_A = F(A_i, B_j)$, то есть $max H_A = \max\limits_{A_i \in X}\{F(A_i, B_j)\}$, а задача второго игрока – в том, чтобы за счет выбора своей стратегии $B_j \in Y$ максимизировать свою функцию выигрыша: $H_B = G(A_i, B_j)$, то есть $max H_B = \max\limits_{B_j \in Y}\{G(A_i, B_j)\}$.

Решить игру – это значит найти *оптимальные* стратегии игроков и *цену* игры. Для решения игры выбирается принцип оптимальности - принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Для корректного анализа игры, были приняты два предположения, называемые гипотезой полной информированности и гипотезой о рациональном (разумном) поведении игроков. На основании гипотезы о рациональном (разумном) поведении игроков противник считается сильным, то есть разумным, это означает, что при выборе первым игроком своей A_i –ой стратегии ($i -$ ая строка матрицы A), второй игрок будучи разумным выберет кую $B_j -$ ую стратегию ($j -$ ый столбец матрицы A), которая обеспечит ему наибольший выигрыш (а первому соответственно наименьший).

Рассмотрим применение принципа гарантированного результата при наихудших условиях первым игроком. Обозначим через α_i наименьший выигрыш первого игрока при выборе им стратегии A_i для всех возможных стратегий второго игрока (наименьшее число в $i -$ ой строке матрицы A), т.е.

$$\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij} = \min_{1 \le j \le n} \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in}\}, i = 1,2, \cdots, m \qquad (3)$$

Действуя разумно игрок A выберет стратегию A_i, для которой α_i окажется максимальным. Поэтому среди чисел $\alpha_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij}$ выбираем максимальное число $\alpha = \max_{1 \le i \le m} \alpha_i = \max\limits_{1 \le i \le m} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m\} =$

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \quad (4)$$

Число α называется *нижней ценой игры***,** а соответствующая ей стратегия называется *максиминной***.** Принцип гарантированного результата при наихудших условиях применяемый первым игроком, называется *принципом максимина.* Таким образом число α есть максимальный гарантированный выигрыш первого игрока (т.е. применяя свою максиминную стратегию, первый игрок обеспечит себе выигрыш, не меньший α) при наихудших условиях.

В правом столбце матицы (4) запишем минимальные выигрыши ка A.

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \\ \beta_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \alpha_i \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_i \\ \cdots \\ \alpha_m \\ (\alpha|\beta) \end{array} \qquad (4)$$

Рассмотрим применение принципа гарантированного результата при наихудших условиях вторым игроком. Обозначим через β_j максимальные выигрыши первого игрока при выборе вторым игроком стратегии B_j для всех возможных стратегий первого игрока (наибольшее число в $j-$ом столбце матрицы A), т.е. $\beta_j = max_{1\le i\le m}\, a_{ij} = \max_{1\le i\le m}\{a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{mj}\}, j = 1, \cdots, n$ (5)

Эти числа запишем в нижней строке матрицы (4). Действуя разумно игрок B выберет стратегиюB_j, для которой $\beta_j = \beta$ окажется минимальным, таким выбором он страхует себя от наибольшего проигрыша, при этом не позволяя первому игроку выиграть больше β. Поэтому среди чисел $\beta_j = max_{1\le i\le m}\, a_{ij}$ выбираем минимальное число

$$\beta = \min_{1\le j\le n} \beta_j = \min_{1\le j\le n}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n\} = \min_{1\le j\le n}\ \max_{1\le i\le m} a_{ij} \quad (6)$$

Число β называется *верхней ценой игры*, а соответствующая ей стратегия называется *минимаксной*. Принцип гарантированного результата при наихудших условиях применяемый вторым игроком, называется *принципом минимакса.* Применяя свою минимаксную стратегию, второй игрок не позволит первому игроку выиграть больше β, а сам не проиграет большеβ, или, иначе, выиграет не меньше чем $(-\beta)$.

Нижняя цена игры α и верхняя цена игры β связаны неравенством:

$$\alpha \le \beta. \qquad (7)$$

Если

$$\alpha = \beta = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}}$$

или

$$\max_{1\le i\le m}\ \min_{1\le j\le n} a_{ij} = \min_{1\le j\le n}\ \max_{1\le i\le m} a_{ij} = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}} = \nu, \qquad (8)$$

то игру называют игрой с седловой точкой в чистых стратегиях,$\nu = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}}$ - ценой игры, пара стратегий $(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}})$- седловой точкой цы. $A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}$ – оптимальными чистыми стратегиями соответственно первого и второго игроков, так как эти стратегии являются наиболее выгодными сразу для обоих игроков, обеспечивая первому игроку гарантированный выигрыш не менее ν, а второму игроку гарантированный проигрыш не лее$(-\nu)$, отклоняться от этих стратегий не выгодно ни одному из игроков.

Ситуация$\left(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}\right)$ в которой значение платежной функции первого игрока $F\left(A_{i,\text{опт}}, B_{j,\text{опт}}\right) = a_{i,\text{опт}j,\text{опт}}$ называется *равновесной ситуацией.*

Седловых точек в матрице может быть несколько, но функция выигрыша в этих точках имеет одно и то же значение.

Пример 1. Дана матричная игра с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решить игру, то есть найти нижнюю и верхнюю цену игры, цену игры.

Решение. Решить игру это значит найти оптимальные чистые стратегии игроков и цену игры. Если оптимальные чистые стратегии отсутствуют, то нет решения данной игры в чистых стратегиях. Что бы найти оптимальные чистые стратегии игроков нужно определить максиминную стратегию первого игрока, минимаксную стратегию второго игрока, нижнюю и верхнюю цену игры, наличие седловой точки.

1. Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:

$$A = \begin{array}{c} (\boldsymbol{A_i}|\boldsymbol{B_j}) \\ \boldsymbol{A_1} \\ \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{A_3} \\ \boldsymbol{A_4} \\ \boldsymbol{\beta_j} \end{array} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} & \boldsymbol{B_3} & \boldsymbol{B_4} \\ 3 & 9 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \\ 7 & 9 & \mathbf{5} & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha_i} \\ 1 \\ \mathbf{5} \\ 3 \\ 1 \\ (\mathbf{5}|\mathbf{5}) \end{array}$$

Применим формулы нахождения нижней и верхней цены игры:

$$\alpha_1 = \min_{1\le j\le 4} a_{1j} = \min_{1\le j\le 4}\{3,9,2,1\} = 1$$

$$\alpha_2 = \min_{1\le j\le 4} a_{2j} = \min_{1\le j\le 4}\{7,8,5,6\} = 5$$

$$\alpha_3 = \min_{1 \le j \le 4} a_{3j} = \min_{1 \le j \le 4}\{4,7,3,5\} = 3$$

$$\alpha_4 = \min_{1 \le j \le 4} a_{3j} = \min_{1 \le j \le 4}\{5,6,1,7\} = 1$$

$$\alpha = \max_{1 \le i \le 4} \alpha_i = \max_{1 \le i \le 4}\{1,5,3,1\} = 5$$

$\alpha = 5$ – нижняя цена игры, ей соответствует стратегия A_2, которая является максиминной стратегией первого игрока.

Найдем верхнюю цену игры и минимаксную стратегию второго игрока

$$\beta_1 = \max_{1 \le i \le 4} a_{i1} = \max_{1 \le i \le 4}\{3,7,4,5\} = 7,$$

$$\beta_2 = \max_{1 \le i \le 4} a_{i2} = \max_{1 \le i \le 4}\{9,8,7,6\} = 9,$$

$$\beta_3 = \max_{1 \le i \le 4} a_{i3} = \max_{1 \le i \le 4}\{2,5,3,1\} = 5.$$

$$\beta_4 = \max_{1 \le i \le 4} a_{i3} = \max_{1 \le i \le 4}\{1,6,5,7\} = 7.$$

$$\beta = \min_{1 \le j \le 3} \beta_j = \min_{1 \le j \le n}\{7,9,5,7\} = 5$$

$\beta = 5$ – верхняя цена игры, ей соответствует стратегия B_3, которая является минимаксной стратегией первого игрока.

Нижняя цена игры совпадает с верхней ценой игры $\alpha = \beta = 5$. Таким образом, цена игры равна $\nu = 5$. Это означает, что в данной игре имеется седловая точка$\left(A_{2,\text{опт}}, B_{3,\text{опт}}\right)$ являющаяся равновесной ситуацией игры, вторая стратегия первого игрока и третья стратегия второго игрока являются оптимальными чистыми стратегиями. Данная игра имеет решение в чистых стратегиях.

Рассмотрим пример в которой нет решения в чистых стратегиях.

Пример 2. Дана матричная игра с платёжной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решить игру.

Решение. Решить игру это значит найти оптимальные чистые стратегии игроков и цену игры. Если оптимальные чистые стратегии отсутствуют, то нет решения данной игры в чистых стратегиях. Как и в предыдущем примере находим максиминную и минимаксную стратегии первого и второго игроков, нижнюю и верхнюю цену игры, устанавливаем наличие или отсутствие седловой точки.

1. Справа от платёжной матрицы выпишем наименьшие элементы в её строках и отметим максимальный из них, а снизу от матрицы - наибольшие элементы в столбцах и выберем минимальный из них:

$$A = \begin{array}{c|ccc|c} (\boldsymbol{A_i}|\boldsymbol{B_j}) & \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} & \boldsymbol{B_3} & \boldsymbol{\alpha_i} \\ \boldsymbol{A_1} & 2 & 5 & 3 & \mathbf{2} \\ \boldsymbol{A_2} & 3 & 1 & 7 & 1 \\ \boldsymbol{A_3} & 8 & 0 & 2 & 0 \\ \boldsymbol{\beta_j} & 8 & \mathbf{5} & 7 & (\mathbf{5}|\mathbf{2}) \end{array}$$

Применим формулы нахождения нижней и верхней цены игры:

$$\alpha_1 = \min_{1\le j\le 3} a_{1j} = \min_{1\le j\le 3}\{2,5,3\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min_{1\le j\le 3} a_{2j} = \min_{1\le j\le 3}\{3,1,7\} = 1$$

$$\alpha_3 = \min_{1\le j\le 3} a_{3j} = \min_{1\le j\le 3}\{8,0,2\} = 0$$

$$\alpha = \max_{1\le i\le 3} \alpha_i = \max_{1\le i\le 3}\{2,1,0\} = 2$$

$\alpha = 2$ – нижняя цена игры, ей соответствует стратегия A_1, которая является максиминной стратегией первого игрока.

Найдем верхнюю цену игры и минимаксную стратегию второго игрока

$$\beta_1 = \max_{1\le i\le 3} a_{i1} = \max_{1\le i\le 3}\{2,3,8\} = 8,$$

$$\beta_2 = \max_{1\le i\le 3} a_{i2} = \max_{1\le i\le 3}\{5,1,0\} = 5,$$

$$\beta_3 = \max_{1\le i\le 3} a_{i3} = \max_{1\le i\le 3}\{3,7,2\} = 7.$$

$$\beta = \min_{1\le j\le 3} \beta_j = \min_{1\le j\le n}\{8,5,7\} = 5$$

$\beta = 5$ – верхняя цена игры, ей соответствует стратегия B_2, которая является минимаксной стратегией первого игрока.

$\alpha < \beta$, т. е. $2 < 5$ -это означает, что в данной игре отсутствует седловая точка и, следовательно, нет равновесной ситуации, нет решения в чистых стратегиях.

Приведенные выше примеры показывают, что не во всех матричных играх имеется седловая точка и, следовательно, решение в чистых стратегиях.

Для любой матричной игре справедлива следующее утверждение.

Теорема 1. В любой матричной игре нижняя цена игры не превосходит верхней: $\alpha \leq \beta$. Теорему примем без доказательства.

Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если $\alpha < \beta$, то есть в игре отсутствует седловая точка, то применение максиминной и минимаксной стратегий не дает оптимальное решение игры. В игре появляется нейтральная зона от α до β и возможность у каждого игрока улучшить свой выигрыш случайным образом чередуя чистые стратегии, таким образом поиск оптимального решения приводит к применению сложной стратегии, смешанной стратегии.

Смешанной стратегией называется случайное применение двух и более стратегий с определенными частотами.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий$A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_m$с вероятностями

$$p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_m, \text{где все } p_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m), \text{а} \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_m \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

или в виде вектора

$$S_A = \bar{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_m) \qquad (2.2)$$

Смешанной стратегией S_B игрока B называется применение чистых стратегий$B_1, B_2, \cdots, B_j, \cdots, B_n$с вероятностями

$$q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n, \text{где все } q_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n), \text{а} \sum_{i=1}^{n} q_j = 1,$$

Аналогично смешанные стратегии игрока B обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

или

$$S_B = \bar{q} = \left(q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n\right), \tag{2.4}$$

Множества чистых стратегий $\{A_1, \cdots, A_m\}$ и $\{B_1, \cdots, B_n\}$ игроков A и B в игре со смешанными стратегиями являются случайными независимыми событиями и вероятность появления их произведения$\left(A_i, B_j\right)$ равна произведению их вероятностей, то есть $p\left(A_i, B_j\right) = p(A_i) \cdot p\left(B_j\right) = p_i \cdot q_j$.

Так как игроки свои чистые стратегии выбирают случайным образом, то это им обеспечивает бесконечное множество смешанных стратегий.

Для анализа игры в смешанных стратегиях в платежной матрице (2.5) игры, справа против каждой стратегии первого игрока запишем вероятности с которыми игрок будет применять свои чистые стратегии, а в нижней строке против каждой стратегии второго игрока запишем вероятности с которыми он их будет применять.

$$A = \begin{array}{c} \left(A_i|B_j\right) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \\ \beta_j \\ \bar{q} \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j & \cdots & \beta_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{array}\right) \begin{array}{cc} \alpha_i & \bar{p} \\ \alpha_1 & p_1 \\ \alpha_2 & p_2 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_i & p_i \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_m & p_m \\ (\alpha|\beta) & - \\ - & - \end{array} \tag{2.5}$$

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, следовательно, случайными становятся величины выигрышей игроков. Поэтому выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) определяют его математическим ожиданием, которое находят по формуле:

$$E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \, q_j$$

$$= (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{i1}p_i + \cdots + a_{i1}p_m)q_1 +$$

$$+(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{i2}p_i + \cdots + a_{m2}p_m)q_2 +$$

$$+(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{i2}p_i + \cdots + a_{m2}p_m)q_2 + \cdots +$$
$$+\left(a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{mj}p_m\right)q_j + \cdots$$
$$+(a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{in}p_i + \cdots + a_{mn}p_m)q_n. \qquad (2.6)$$

Функция $E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i\, q_j$ называется *платежной функцией* игры с матрицей (2.5).

Рассмотрим поведение первого игрока в игре со смешанными стратегиями. Для этого найдем $v_j(p)$- все средние выигрыши (т. е. математическое ожидание выигрыша) первого и, следовательно, проигрыши второго игроков, когда второй игрок придерживается своей чистой стратегии B_j, а первый игрок применяет свою смешанную стратегию $\bar{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_m)$, $v_j(p)$находится по формуле (2.7)

$$v_j(p) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \left(a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{ij}p_m\right), j = \overline{1, n}, \qquad (2.7)$$

Например, $v_1(p)$ - средний выигрыш первого и, следовательно, проигрыш второго игроков, когда второй игрок придерживается своей чистой стратегииB_1.

$$v_1(p) = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{i1}p_i + \cdots + a_{i1}p_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} p_i$$

Точно также, как в игре с чистыми стратегиями первый игрок находит лучший результат из худших, для этого для каждой функции $\boldsymbol{v_j(p)}$ он находит худшее значение, т.е. минимум, а из них находит наилучшее значение максимум, это число называют *нижней ценой* игры в смешанных стратегиях и обозначают через $\boldsymbol{\alpha}$, рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i =$$
$$= \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \left\{a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{ij}p_m\right\} =$$
$$= \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \left\{v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots v_n\right\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.8)$$

Проанализируем поведение второго игрока. Для этого сперва найдем средние проигрыши $\boldsymbol{w_i}(\boldsymbol{q})$ второго игрока и, следовательно, выигрыши первого, когда первый игрок придерживается своей чистой стратегии $A_i, i = \overline{1,m}$, а второй применяет свои смешанные стратегии

$\bar{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n)$, $\boldsymbol{w_i}(\boldsymbol{q})$ находится по формуле (2.9)

$$\boldsymbol{w_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = (a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{ij}q_j + \cdots + a_{in}q_n),$$

$$i = 1, 2, \cdots, m \qquad (2.9)$$

Что бы обезопасить себя от большого проигрыша второй игрок, как и первый находит лучший результат из худших, поэтому для каждой ции $\boldsymbol{w_i}$ он находит для себя худшее значение, т.е. максимум, а из них находит наилучшее для себя значение минимум, это число называют верхней ценой игры в смешанных стратегиях и обозначают через $\boldsymbol{\beta}$, рассчитывается по формуле:

$$\boldsymbol{\beta} = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j =$$

$$= \min_{\bar{q}} \max_{1 \le i \le n} \{a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{ij}q_j + \cdots + a_{in}q_n\} =$$

$$= \min_{\bar{q}} \max_{1 \le i \le n} \{w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots w_m\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \quad (2.10)$$

Оптимальными смешанными стратегиями называются стратегии, которые удовлетворяют соотношению:
$\max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*)$ (2.11)

Значение функции $E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*)$ обозначают через $\boldsymbol{\nu}$ и называют *ценой игры***,** т.е. величина $\nu = E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*)$- цена игры.

Оптимальные смешанные стратегии можно определить используя понятие седловой точки.

Векторы $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*, \cdots, p_m^*)$и $\bar{q}^* = (q_1^*, q_2^*, \cdots, q_j^*, \cdots, q_n^*)$, называются *оптимальными смешанными стратегиями*, если они образуют седловую точку платежной функции игры $E(A,\bar{p},\bar{q})$, т.е. удовлетворяют неравенству

$$E(A,\bar{p},\bar{q}^*) \leq E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*) \leq E(A,\bar{p}^*,\bar{q}) \qquad (2.12)$$

Из соотношения (2.12) следует, что в седловой точке$(\bar{p}^*,\bar{q}^*)$ платежная функция $E(A,\bar{p},\bar{q})$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\bar{p}$ игрока А и минимума по смешанным стратегиям $\bar{q}$ игрока В.

В отличии от игры в чистых стратегиях, в которой седловая точка существует не всегда, в игре со смешанными стратегиями она имеется всегда, это доказывает теорема (Дж. фон Неймана).

Теорема 1. *Основная теорема теории матричных игр* (Дж. фон Нейман). Для матричной игры с любой матрицей A величины

$\max\limits_{\bar{p}} min_{\bar{q}}\ E(A,\bar{p},\bar{q})$ и $min_{\bar{q}}\ \max\limits_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q})$ существуют и равны между собой:

$\max\limits_{\bar{p}} min_{\bar{q}}\ E(A,\bar{p},\bar{q}) = min_{\bar{q}}\ \max\limits_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q})$ и существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $(\bar{p}^*,\bar{q}^*)$, для которой выполняется соотношение

$$E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*) = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A,\bar{p},\bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q}).$$

Основные свойства оптимальных смешанных стратегий.

Теорема 2. Пусть $\bar{p}^* = (p_1^*,p_2^*,\cdots,p_i^*,\cdots,p_m^*)$и $\bar{q}^* = \left(q_1^*,q_2^*,\cdots,q_j^*,\cdots,q_n^*\right)$ оптимальные смешанные стратегии и $\nu = E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*)$ - цена игры.

Оптимальная смешанная стратегия $\bar{p}^*$ игрока A складывается только из тех чистых стратегий A_i, $i = 1,2,\cdots,m$ т (т.е. только те вероятности $p_i, i = 1,2,\cdots,m$ могут отличаться от нуля), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* = \nu.$$

Аналогично, только те вероятности $q_j, j = 1,2,\cdots,n$, могут отличаться от нуля, для которых

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \nu.$$

Имеют место соотношения

$$\nu = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \min_{\bar{q}} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = \nu. (2.13)$$

Пусть стратегии$(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*,)$ являются оптимальными, а$(p_{i+1}, \cdots, p_m)$ не оптимальными для первого игрока, тогда эти вероятности будут равны нулю, т.е. $p_{i+1} = 0, \cdots, p_m = 0$, тогда оптимальная смешанная стратегия первого игрока примет вид: $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*, 0, \cdots, 0)$,а цену игры найдем по формуле

$$\nu = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \min_{1 \le j \le n} \left\{ \begin{matrix} v_1^* = a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + \cdots + a_{i1} p_i^*; \\ v_2^* = a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + \cdots + a_{i2} p_i^*; \\ v_j^* = a_{1j} p_1^* + a_{2j} p_2^* + \cdots + a_{ij} p_i^*; \\ \cdots; \\ v_n^* = a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + \cdots + a_{in} p_i^* \end{matrix} \right\} \quad (2.14)$$

Если известны оптимальные стратегии первого игрока, то можно по теореме 2 найти оптимальные стратегии второго игрока. Для этого из всех выигрышей первого игрока выбираем выигрыши, соответствующие цене игры ν, пусть для определенности это будут выигрыши, соответствующие чистым стратегиям второго игрока$B_1, \cdots B_j$, тогда эти стратегии и являются оптимальными для второго игрока, все вероятности для остальных чистых стратегий будут равняться нулю, т.е.

$$\bar{q}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_j^*, 0, \cdots 0\right)$$

Тогда матрица (2.5) примет вид:

$$\begin{array}{c|ccccccc|cc}
(A_i|B_j) & B_1^* & B_1^* & \cdots & B_j^* & B_{j+1} & \cdots & B_n & \alpha_i & \bar{p} \\
\hline
A_1^* & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & \alpha_1 & p_i^* \\
A_2^* & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} & \alpha_2 & p_i^* \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_i^* & a_{i,1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & \alpha_i & p_i^* \\
A_{i+1} & a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & \alpha_{i+1} & p_{i+1}=0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn} & \alpha_m & p_m = 0 \\
\beta_j & \nu & \nu & \cdots & \nu & \beta_{j+1} & \cdots & \beta_n & (\alpha|\beta) & \nu \\
\bar{q} & q_1^* & q_2^* & \cdots & q_j^* & q_{j+1}=0 & \cdots & q_n = 0 & - & -
\end{array}$$

Конечная игра с природой

Пусть сторона A имеет m возможных стратегий $A_1, A_2, \cdots, A_m$.

О состоянии «природы» П можно сделать n предположений $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n$.

Для каждой пары стратегий $(A_i, \Pi_j), i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ существует функция $f(A_i, \Pi_j)$, которая является случайной величиной и называется *функцией потерь*.

Пусть удаётся определить величину a_{ij}- эффективность решения A_i в условиях Π_j - для всех комбинаций пар стратегий (A_i, Π_j). В этом случае платёжная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{array}{c} (A_i|\Pi_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots & \Pi_j & \cdots & \Pi_n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \end{array}$$

В теории статистических игр, помимо платёжной матрицы, используется и, так называемая, *матрица рисков* или *матрица сожалений*.

Риском стороны A при использовании стратегии A_i в условиях Π_j называется величина: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$- максимальный выигрыш стороны A в состоянии «природы»

$$R = \begin{array}{cc} (A_i|\Pi_j) & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots & \Pi_j & \cdots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Рассмотрим критерии выбора оптимальной стратегии в игре с «природой».

1. Наиболее просто решается задача о принятии решения в условиях неопределённости, когда, хотя и неизвестны условия выполнения ции $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n$, но известны их вероятности $q_1, q_2, \cdots, q_n$ соответственно.

В этом случае в качестве показателя эффективности естественно взять математическое ожидание выигрыша

$$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j.$$

Критерий Байеса

По критерию Байеса, за оптимальную чистую стратегию принимается чистая стратегия A_i, при которой величина $\overline{a_i}$ достигает наибольшего значения. С помощью этого критерия задача принятия решения в условиях неопределённости сводится к задаче принятия решения в условиях определённости, только принятое решение является оптимальным не в каждом отдельном случае, а в среднем.

Следует отметить, что, по критерию Байеса, оптимальной будет та стратегия A_i, при которой минимизируется величина среднего риска

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$$

Это связано с тем, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

Критерий Лапласа

Вероятности $q_1, q_2, \cdots, q_n$ состояний «природы» $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n$ могут быть определены из статистических данных, связанных с многократным выполнением подобных операций или просто с проведением наблюдений над состояниями «природы». Однако часто об этих состояниях нет никаких представлений. В подобных случаях состояния могут быть оценены субъективно: некоторые из них представляются нам более, а другие – менее правдоподобными. Для того чтобы наши субъективные представления формализовать численно, могут применяться различные технические приёмы. Так, если мы не можем предпочесть ни одной гипотезы, то естественно положить состояния «природы» равновероятными:

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \frac{1}{n}.$$

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности (равновероятности) и содержательно может быть сформулирован в виде: «Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, то надо считать их равновероятными». При принятии этой гипотезы в качестве оценки $i -$ й альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в $i -$ й строке матрицы выигрышей. Таким образом оценка по критерию Лапласа имеет вид

$$L(i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (2)$$

При введении оценки Лапласа любые две альтернативы будут сравнимы между собой по предпочтительности: лучшей считается та альтернатива, которая имеет большую оценку по критерию Лапласа.

Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива i^*, которая максимизирует оценку (2):

$$L(i^*) = \max_{1 \le i \le m} L(i)$$

Этот подход получил название *принципа недостаточного основания Лапласа.*

Пусть теперь вероятности состояний «природы» неизвестны.

Рассмотрим критерии, которые можно использовать для определения оптимальной стратегии в этом случае.

Максиминный критерий Вальда

Критерий Вальда основан на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в следующем виде: «При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант».

При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы iслужит число $\underline{W}(i) = min_{1 \le j \le n} a_{ij}$ и сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия $\underline{W}$. Оптимальной в этом случае является альтернатива максимизирующая функцию $\underline{W}$, т.е. альтернатива i^*, для которой выполняется условие

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \underset{1 \le i \le m}{max} \ \underset{1 \le j \le n}{min} \ a_{ij}$$

Согласно этому критерию, в качестве оптимальной выбирается та стратегия A_i, при которой минимальный выигрыш максимален.

Альтернатива i^* называется *максиминной,* а число $max_{1 \le i \le m} min_{1 \le j \le n} a_{ij}$ называется *максимином.* Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается максимальная альтернатива, называется *принципом максимина*. Если руководствоваться этим критерием, нужно всегда ориентироваться на худшие условия и выбирать ту стратегию, для которой в худших условиях выигрыш максимален.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Этот критерий рекомендует в условиях неопределённости выбирать ту стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (т.е. тогда, когда риск максимален):

$$p = \min_{1 \le i \le m} r_{ij}, \ r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $\beta_j = \max_{1 \le i \le m} a_{ij}$- максимальный выигрыш стороны A в состоянии «природы» Π_j.

$$R = \begin{array}{c} (A_i|\Pi_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots & \Pi_j & \cdots & \Pi_n \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} & \cdots & r_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица рисков.

Сущность этого критерия состоит в том, чтобы любыми путями избежать большого риска при принятии решения.

Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица

По критерию Гурвица, оптимальной является та стратегия A_i, для которой принимает наибольшее значение величина

$H_\lambda(i) = \lambda \cdot \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_{1 \le j \le n} a_{ij}$, где $\lambda \in [0,1]$ (3)

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда, а при $\lambda = 0$ в критерий крайнего оптимизма, рекомендующий ту стратегию, для которой в наилучших условиях выигрыш максимален.

2. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если $\alpha < \beta$, то есть в игре отсутствует седловая точка, то применение максиминной и минимаксной стратегий не дает оптимальное решение игры. В игре появляется нейтральная зона от α до β и возможность у каждого игрока улучшить свой выигрыш случайным образом чередуя чистые стратегии, таким образом поиск оптимального решения приводит к применению сложной стратегии, смешанной стратегии.

Смешанной стратегией называется случайное применение двух и более стратегий с определенными частотами.

Смешанной стратегией S_A игрока A называется применение чистых стратегий $A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_m$ с вероятностями

$$p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_m, \text{ где все } p_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m), \text{ а } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

Смешанные стратегии игрока A записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_i & \cdots & A_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_m \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

или в виде вектора

$$S_A = \bar{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_m) \qquad (2.2)$$

Смешанной стратегией S_B игрока B называется применение чистых стратегий $B_1, B_2, \cdots, B_j, \cdots, B_n$ с вероятностями $q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n$, где все $q_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, а $\sum_{i=1}^{n} q_j = 1$,

Аналогично смешанные стратегии игрока B обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

или

$$S_B = \bar{q} = \left(q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n\right), \qquad (2.4)$$

Множества чистых стратегий $\{A_1, \cdots, A_m\}$ и $\{B_1, \cdots, B_n\}$ игроков A и B в игре со смешанными стратегиями являются случайными независимыми событиями и вероятность появления их произведения $\left(A_i, B_j\right)$ равна произведению их вероятностей, то есть $p\left(A_i, B_j\right) = p(A_i) \cdot p\left(B_j\right) = p_i \cdot q_j$.

Так как игроки свои чистые стратегии выбирают случайным образом, то это им обеспечивает бесконечное множество смешанных стратегий.

Для анализа игры в смешанных стратегиях в платежной матрице (2.5) игры, справа против каждой стратегии первого игрока запишем вероятности с которыми игрок будет применять свои чистые стратегии, а в нижней строке против каждой стратегии второго игрока запишем вероятности с которыми он их будет применять.

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j)\\ A_1\\ A_2\\ \cdots\\ A_i\\ \cdots\\ A_m\\ \beta_j\\ \bar{q}\end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n\\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mj} & \vdots & a_{mn}\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j & \cdots & \beta_n\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \alpha_i & \bar{p}\\ \alpha_1 & p_1\\ \alpha_2 & p_2\\ \cdots & \cdots\\ \alpha_i & p_i\\ \cdots & \cdots\\ \alpha_m & p_m\\ (\alpha|\beta) & -\\ - & - \end{array} \qquad (2.5)$$

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, следовательно, случайными становятся величины выигрышей игроков. Поэтому выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) определяют его математическим ожиданием, которое находят по формуле:

$$E(A,\bar{p},\bar{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i\,q_j = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{i1}p_i + \cdots + a_{i1}p_m)q_1 +$$

$$+(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{i2}p_i + \cdots + a_{m2}p_m)q_2 +$$

$$+(a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{i2}p_i + \cdots + a_{m2}p_m)q_2 + \cdots +$$

$$+(a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{mj}p_m)q_j + \cdots$$

$$+(a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{in}p_i + \cdots + a_{mn}p_m)q_n. \qquad (2.6)$$

Функция $E(A,\bar{p},\bar{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i\,q_j$называется **платежной функцией** игры с матрицей (2.5).

Рассмотрим поведение первого игрока в игре со смешанными стратегиями. Для этого найдем $v_j(p)$- все средние выигрыши (т.е. математическое ожидание выигрыша) первого и, следовательно, проигрыши второго игроков, когда второй игрок придерживается своей чистой стратегии B_j, а первый игрок применяет свою смешанную стратегию

$\bar{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_m)$, $v_j(p)$находится по формуле (2.7)

$$v_j(p) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i = (a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{ij}p_m), j = \overline{1,n}, \quad (2.7)$$

Например, $v_1(p)$ - средний выигрыш первого и, следовательно, проигрыш второго игроков, когда второй игрок придерживается своей чистой стратегииB_1.

$$v_1(p) = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{i1}p_i + \cdots + a_{i1}p_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i$$

Точно также, как в игре с чистыми стратегиями первый игрок находит лучший результат из худших, для этого для каждой функции $\boldsymbol{v_j}(\boldsymbol{p})$ он находит худшее значение, т.е. минимум, а из них находит наилучшее значение максимум, это число называют **нижней ценой** игры в смешанных стратегиях и обозначают через $\boldsymbol{\alpha}$, рассчитывается по формуле:

$$\alpha = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i =$$

$$= \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \{a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \cdots + a_{ij}p_i + \cdots + a_{ij}p_m\} =$$

$$= \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \{v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots v_n\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.8}$$

Проанализируем поведение второго игрока. Для этого сперва найдем средние проигрыши $\boldsymbol{w_i}(\boldsymbol{q})$ второго игрока и, следовательно, выигрыши первого, когда первый игрок придерживается своей чистой стратегии $A_i, i = \overline{1, m}$, а второй применяет свои смешанные стратегии

$\bar{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_j, \cdots, q_n)$, $\boldsymbol{w_i}(\boldsymbol{q})$ находится по формуле (2.9)

$$\boldsymbol{w_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j = (a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{ij}q_j + \cdots + a_{in}q_n),$$

$$i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.9}$$

Что бы обезопасить себя от большого проигрыша второй игрок, как и первый находит лучший результат из худших, поэтому для каждой ции $\boldsymbol{w_i}$ он находит для себя худшее значение, т.е. максимум, а из них находит наилучшее для себя значение минимум, это число называют верхней ценой игры в смешанных стратегиях и обозначают через $\boldsymbol{\beta}$, рассчитывается по формуле:

$$\boldsymbol{\beta} = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j =$$

$$= \min_{\bar{q}} \max_{1\le i\le n} \{a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \cdots + a_{ij}q_j + \cdots + a_{in}q_n\} =$$

$$= \min_{\bar{q}} \max_{1\le i\le n} \{w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots w_m\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m \qquad (2.10)$$

Число $\beta = min_{\bar{q}}\ \max_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q})$ называется верхней ценой игры.

В платежную матрицу (2.5) первого игрока допишем столбец со средними выигрышами первого игрока, когда он придерживается своих чистых стратегий и строку со средними выигрышами (проигрышами) первого (второго) игроков, когда второй игрок придерживается своих чистых стратегий. Платежная матрица (2.5) примет вид(2.5').

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_i \\ \cdots \\ A_m \\ \bar{q} \\ v_j \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_j & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \bar{p} & w_i \\ p_1 & w_1 \\ p_2 & w_2 \\ \cdots & \cdots \\ p_i & w_i \\ \cdots & \cdots \\ p_m & w_m \\ - & - \\ - & - \end{array} \quad (2.5')$$

Оптимальными смешанными стратегиями называются стратегии, удовлетворяющие соотношению

$$\max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A,\bar{p},\bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A,\bar{p},\bar{q}) = E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*) \ (2.11)$$

Значение функции $E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*)$ обозначают через $\boldsymbol{\nu}$ и называют **ценой игры,** т.е. величина $\nu = E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*)$- цена игры.

Оптимальные смешанные стратегии можно определить используя понятие седловой точки.

Векторы $\bar{\boldsymbol{p}}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*, \cdots, \boldsymbol{p}_i^*, \cdots, \boldsymbol{p}_m^*)$и $\bar{\boldsymbol{q}}^* = (\boldsymbol{q}_1^*, \boldsymbol{q}_2^*, \cdots, \boldsymbol{q}_j^*, \cdots, \boldsymbol{q}_n^*)$, называются **оптимальными смешанными стратегиями**, если они образуют седловую точку платежной функции игры $E(A,\bar{p},\bar{q})$, т.е. удовлетворяют неравенству

$$E(A,\bar{p},\bar{q}^*) \le E(A,\bar{p}^*,\bar{q}^*) \le E(A,\bar{p}^*,\bar{q}) \qquad (2.12)$$

Из соотношения (2.12) следует, что в седловой точке$(\bar{p}^*, \bar{q}^*)$ платежная функция $E(A, \bar{p}, \bar{q})$ достигает максимума по смешанным стратегиям $\bar{p}$ игрока А и минимума по смешанным стратегиям $\bar{q}$ игрока В.

В отличии от игры в чистых стратегиях, в которой седловая точка существует не всегда, в игре со смешанными стратегиями она имеется всегда, это доказывает теорема (Дж. фон Неймана).

Теорема 1. Основная теорема теории матричных игр (Дж. фон

Нейман). Для матричной игры с любой матрицей A величины $\max_{\bar{p}} min_{\bar{q}}\ E(A, \bar{p}, \bar{q})$ и $min_{\bar{q}}\ \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q})$ существуют и равны между собой:

$\max_{\bar{p}} min_{\bar{q}}\ E(A, \bar{p}, \bar{q}) = min_{\bar{q}}\ \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q})$

и существует хотя бы одна ситуация в смешанных стратегиях $(\bar{p}^*, \bar{q}^*)$, для которой выполняется соотношение

$$E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*) = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} E(A, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} E(A, \bar{p}, \bar{q}).$$

Теорема 2. Основные свойства оптимальных смешанных стратегий.

Пусть $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*, \cdots, p_m^*)$и $\bar{q}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_j^*, \cdots, q_n^*\right)$ оптимальные смешанные стратегии и $\nu = E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*)$ - цена игры.

Оптимальная смешанная стратегия $\bar{p}^*$ игрока A складывается только из тех чистых стратегий A_i , $i = 1, 2, \cdots, m$ т (т.е. только те вероятности $p_i, i = 1, 2, \cdots, m$ могут отличаться от нуля), для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = \nu.$$

Аналогично, только те вероятности $q_j, j = 1, 2, \cdots, n$, могут отличаться от нуля, для которых $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \nu$.

Имеют место соотношения

$$\nu = \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_{\bar{p}} \min_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \min_{\bar{q}} \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j =$$

$$= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = \nu. \qquad (2.13)$$

Пусть стратегии$(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*,)$ являются оптимальными, а$(p_{i+1}, \cdots, p_m)$ не оптимальными для первого игрока, тогда эти вероятности будут равны нулю, т.е. $p_{i+1} = 0, \cdots, p_m = 0$, тогда оптимальная смешанная стратегия первого игрока примет вид: $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*, 0, \cdots, 0)$,а цену игры найдем по формуле

$$\nu = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \min_{1\le j\le n} \begin{cases} v_1^* = a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* + \cdots + a_{i1}p_i^*; \\ v_2^* = a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* + \cdots + a_{i2}p_i^*; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ v_j^* = a_{1j}p_1^* + a_{2j}p_2^* + \cdots + a_{ij}p_i^*; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ v_n^* = a_{1n}p_1^* + a_{2n}p_2^* + \cdots + a_{in}p_i^* \end{cases} \qquad (2.14)$$

Если известны оптимальные стратегии первого игрока, то можно по теореме 2 найти оптимальные стратегии второго игрока. Для этого из всех выигрышей первого игрока выбираем выигрыши, соответствующие цене игры ν, пусть для определенности это будут выигрыши, соответствующие чистым стратегиям второго игрока$B_1, \cdots B_j$, тогда эти стратегии и являются оптимальными для второго игрока, все вероятности для остальных чистых стратегий будут равняться нулю, т.е.

$$\bar{q}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_j^*, 0, \cdots 0\right)$$

Тогда матрица (2.5) примет вид:

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1^* \\ \cdots \\ A_i^* \\ A_{i+1} \\ \cdots \\ A_m \\ \bar{q} \\ v_j \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} B_1^* & \cdots & B_j^* & B_{j+1} & \cdots & B_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \vdots & a_{mj} & a_{m,j+1} & \vdots & a_{mn} \\ q_1^* & \cdots & q_j^* & q_{j+1} = 0 & \cdots & q_n = 0 \\ \nu & \cdots & \nu & \nu_{j+1} \ne \nu & \cdots & \nu_n \ne \nu \end{array} \right) \begin{array}{cc} \bar{p} & w_i \\ p_1^* & w_1 \\ \cdots & \cdots \\ p_i^* & w_i \\ p_{i+1} & w_{i+1} \\ \cdots & \cdots \\ p_m = 0 & w_m \\ - & - \\ \alpha = \beta & = \nu \end{array}$$

Таким образом матричная игра в смешанных стратегиях имеет решение игры

$$\nu = E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*) = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,$$

оптимальные стратегии первого игрока $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_i^*, 0, \cdots, 0)$ и оптимальные стратегии второго игрока $\bar{q}^* = \left(q_1^*, q_2^*, \cdots, q_j^*, 0, \cdots 0\right)$.

3.3 Графическое решение матричных игры

Если в игре со смешанными стратегиями хотя бы один игрок имеет две стратегии, то для решения игры можно применить графический метод. Пусть задана игра$2 \times n$, платежной матрицей игры

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \beta_j \\ \bar{q} \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_j & \cdots & B_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_j & \cdots & \beta_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \alpha_i & \bar{p} \\ \alpha_1 & p_1 \\ \alpha_2 & p_2 \\ \alpha \ne \beta & - \\ - & - \end{array} \quad (2.1.1).$$

В столбец α_i записаны худшие выигрыши для чистых стратегий первого игрока; в столбец $\bar{p}$ записаны вероятности с которыми первый игрок применяет свои чистые стратегии$A_i, i = 1{,}2$.

В строкуβ_j записаны лучшие выигрыши для чистых стратегий первого игрока; в строку $\bar{q}$ записаны вероятности с которыми второй игрок применяет свои чистые стратегии $B_j, j = \overline{1,n}$. В данной игре $\alpha \ne \beta$, нет седловой точки в чистых стратегиях. По теореме-2 (Основные свойства оптимальных смешанных стратегий) имеем

$$\nu = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} p_i^* = \max_{1\le i\le 2} \min_{1\le j\le n} \begin{cases} w_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2; \\ w_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ w_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \\ w_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Максимум функции

$$\min_{1\le j\le n}\begin{cases} w_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2; \\ w_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 \end{cases} \qquad (2.1.3),$$

то есть

$$\max_{1\le i\le 2}\min_{1\le j\le n}\begin{cases} w_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2; \\ w_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

найдем, построив ее график. Для этого строим графики прямых

$$\begin{gathered} w_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2; \\ w_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ w_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 \end{gathered} \qquad (2.1.5)$$

в системе координат pOw рис.1.

Согласно требованиям (2.1.4) на каждой из построенных прямых определяем и выделяем наименьшие значения, на рис.2 они выделены полужирной ломанной линией. Эта ломанная огибает снизу все семейство

построенных прямых и называется **нижней огибающей семейства**.

В соответствии с (2.1.2) цену игры ν определяет верхняя точка построенной нижней огибающей. Координаты этой точки являются оптимальной стратегией игрока А:

$$\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*) = \left[p_1^* = p_{\text{орт}}^*, p_2^* = 1 - p_{\text{орт}}^*\right] = \left(p_{\text{орт}}^*, \left(1 - p_{\text{орт}}^*\right)\right).$$

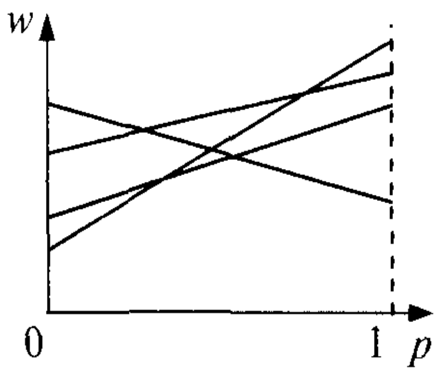


Рис.1

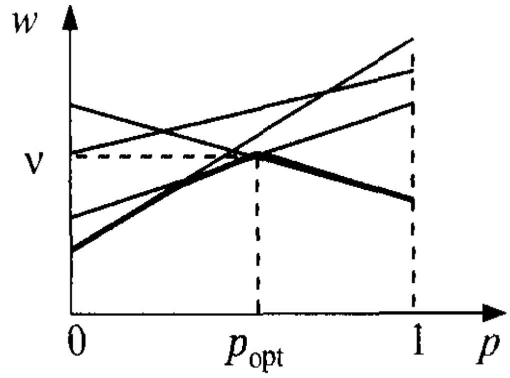


Рис.2

Пример 1. [13]. Найти решение игры вида2×6, с платежной матрицей

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \beta_j \\ \bar{q} \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

Решение. Запишем платежную матрицу в виде:

$$A = \begin{array}{c} (A_i|B_j) \\ A_1 \\ A_2 \\ \beta_j \\ \bar{q} \end{array} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix} \begin{array}{cc} \alpha_i & \bar{p} \\ -1 & p \\ -2 & 1-p \\ -1 \neq 1 & - \\ - & - \end{array}$$

В игре нет седловой точки в чистых стратегиях, так как $\alpha \neq \beta$, где $\alpha = -1$ –нижняя цена игры, $\beta = 1$ –верхняя цена игры, в чистых стратегиях, следовательно, нет решения в чистых стратегиях.

Решение ищем в смешанных стратегиях. Построим график нижней огибающей (2.1.3). Предварительно запишем уравнения прямых (2.1.5):

$$\begin{aligned} w_1 &= 6p - 2(1-p) = 8p - 2; \\ w_2 &= 4p + a_{22}(1-p) = 5p - 1; \\ w_3 &= 3p + 1 \cdot (1-p) = 2p + 1; \\ w_4 &= p + 0 \cdot (1-p) \ = p; \\ w_5 &= -p + 5(1-p) \ = -6p + 5; \\ w_6 &= 0 \cdot p + 4(1-p) = -4p + 4. \end{aligned}$$

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис.3

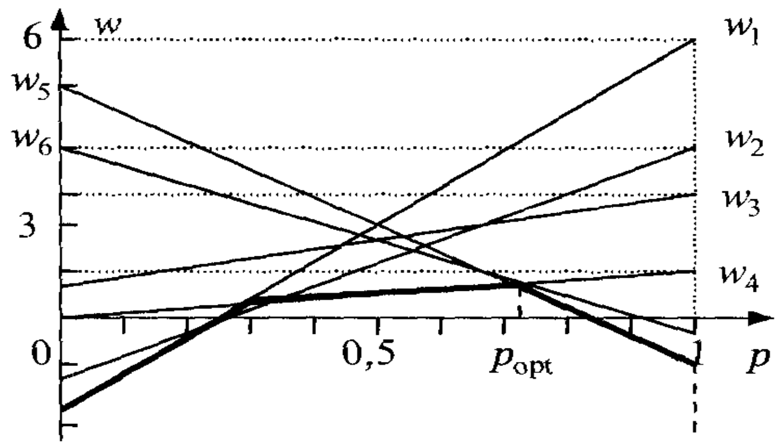


Рис.3

Нижняя огибающая выделена на рис. 15.3 полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении мых w_4 и w_5. Решая уравнение $p = -6p + 5$ получим $p_{\text{опт.}} = p^* = {}^5/_7$. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока А, равна

$$\nu = E(A, \bar{p}^*, \bar{q}^*) = {}^5/_7.$$

Таким образом, цена игры и оптимальная стратегия игрока А равны:

$$\nu = {}^5/_7 ; \bar{p}^* = \left({}^5/_7 ; {}^2/_7 \right).$$

Решение задач

Задача 1. Выбор проекта электростанции

Энергетическая компания должна выбрать проект электростанции. Всего имеется четыре электростанций: A_1 – тепловые, A_2 – приплотинные, A_3 - бесшлюзовые, A_4-шлюзовые. Последствия, связанные со строительством и дальнейшей эксплуатацией электростанций каждого из этих типов, зависит от ряда неопределенных факторов (состояния погоды, возможности наводнения, цены топлива, расходы по транспортировке топлива и т.п.). Предположим, что можно выделить четыре варианта сочетания данных факторов – они выступают в качестве состояний среды и обозначены здесь через

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$. Экономическая эффективность электростанции определяется в данном случае как процент прироста дохода в течении одного года эксплуатации электростанции в сопоставлении с капитальными затратами; она зависит как от типа электростанции, так и от состояния среды и определяется табл.1. Какой проект электростанции является оптимальным?

Таблица 1.

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_1	7	5	1	10
A_2	5	2	8	4
A_3	1	3	4	12
A_4	8	5	1	10

Решение

Проанализируем эту задачу принятия решений в условиях неопределенности на основании критериев, перечисленных для решения конечной игры с природой.

1. Критерий Лапласа

В соответствии формуле $L(i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ находим оценки альтернатив $A_1 - A_4$ по критерию Лапласа таб. (2):

Таблица 2

$$L(A_1) = \frac{1}{4}(7 + 5 + 1 + 10) = \frac{23}{4};$$

$$L(A_2) = \frac{1}{4}(5 + 2 + 8 + 4) = \frac{19}{4};$$

$$L(A_3) = \frac{1}{4}(1 + 3 + 4 + 12) = \frac{20}{4};$$

$$L(A_4) = \frac{1}{4}(8 + 5 + 1 + 10) = \frac{24}{4};$$

A_i	$L(A_i)$
A_1	$23/4$
A_2	$19/4$
A_3	$20/4$
A_4	$24/4$

Согласно критерию Лапласа, оптимальной будет альтернатива A_4- строительство шлюзовой электростанции.

2. Критерий Вальда (максиминный критерий)

В соответствии формуле $\underline{W}(A_i) = min_{1 \le j \le n} a_{ij}$ находим оценки альтернатив $A_1 - A_4$

$\underline{W}(1) = 1$

$\underline{W}(2) = 2$

$\underline{W}(3) = 1$

$\underline{W}(4) = 1$

Таблица 3

A_i	$\underline{W}(A_i)$
A_1	1
A_2	2
A_3	1
A_4	1

Оптимальной по критерию Вальда (максиминной альтернативой) является альтернатива A_2. Строительство приплотинной электростанции обеспечивает максимальную эффективность при наихудшем состоянии среды.

3. Критерий Гурвица

Возьмем в качестве «показателя пессимизма» $\lambda = 1/2$. Тогда оценка альтернатив $A_1 - A_4$ по критерию Гурвица с $\lambda = 1/2$ в соответствии формуле $H_\lambda(A_i) = \lambda \cdot min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot max_{1 \le j \le n} a_{ij}$, таковы (таб.4):

Таблица 3

A_i	$H_{1/2}(A_i)$
A_1	$11/2$
A_2	$10/2$

$H_{1/2}(A_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 = \frac{11}{2}$

$H_{1/2}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{10}{2}$

$H_{1/2}(A_3) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{13}{2}$

$H_{1/2}(A_4) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 = \frac{11}{2}$

A_3	$13/2$
A_4	$11/2$

Оптимальной здесь будет альтернатива A_3- строительство бесшлюзовой электростанции.

Как изменяется оптимальное решение при изменении «показателя пессимизма» λ? В данной задаче при любом показателе $0 < \lambda < 1$ выполняется условие $H_\lambda(A_1) = H_\lambda(A_4) < H_\lambda(A_3)$, поэтому альтернативы A_1, A_4 должны быть отброшены, а альтернативы A_2, A_3 являются конкурирующими. Условие $H_\lambda(A_2) \leq H_\lambda(A_3)$ сводится к неравенсту $2\lambda + 8(1-\lambda) \leq \lambda + 12(1-\lambda)$, решение которого $\lambda \leq 4/5$. Таким образом, при $\lambda \leq 4/5$ оптимальной по критерию Гурвица будет альтернатива A_3, а при $\lambda > 4/5$ оптимальной является альтернатива A_2. В частности при $\lambda = 1$ оптимальной является альтернатива A_2.

4. **Критерий минимаксного риска Сэвиджа**

Для применения критерия Сэвиджа надо преобразовать матрицу выигрышей в матрицу выигрышей в матрицу рисков. Для удобства добавим к первоначальной матрице выигрышей (таб.1) строку столбцовых максимумов $\beta_j = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$ (таб.4); затем составляем матрицу рисков по формуле: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$ (таб.5).

Таблица 4.

Таблица 5.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	7	5	1	10

A_2	5	2	8	4
A_3	1	3	4	12
A_4	8	5	1	10
β_j	8	5	8	12

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	max
A_1	1	0	7	2	7
A_2	3	3	0	8	8
A_3	7	2	4	0	7
A_4	0	0	7	2	7

Оптимальной по критерию Вальда (максиминной альтернативой) является альтернатива A_2.Для того чтобы применить минимаксный критерий к матрице рисков, добавим к ней справа столбец строчных максимумов; каждый элемент этого столбца показывает наибольший риск (наибольшее «сожаление») при выборе соответствующей альтернативы. Из табл.5 видно, что оптимальными по критерию Сэвиджа являются альтернативы A_1, A_3, A_4: они минимизируют максимальное «сожаление», связанное с незнанием истинного состояния среды.

В данной задаче альтернатива A_4 доминирует альтернативу A_1, поэтому альтернатива A_1 может быть сразу исключена из дальнейшего рассмотрения.

Согласно критерию Лапласа, оптимальной будет альтернатива A_4- строительство шлюзовой электростанции. При $\lambda \leq 4/5$ оптимальной по критерию Гурвица будет альтернатива A_3, а при $\lambda > 4/5$ оптимальной является альтернатива A_2.Оптимальными по критерию Сэвиджа являются альтернативы A_3, A_4 .

Пример. Борьба за рынки. Фирмы *А и В* производят» народный товар, который могут сбыть на одном из двух рынков, фирма *В* является более состоятельной. Фирмы выбирают для борьбы один из рынков независимо друг от друга. Если фирмы выберут один и тот же рынок, то в конкурентной борьбе фирма *A* потерпит поражение. Если фирмы выберут разные рынки, то фирма *A,* не встречая противодействия, захватит выбранный рынок. Пусть платежные матрицы игроков имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Из этих матриц следует, что если фирмы выберут один и тот же рынок, то победа достанется фирме *B*. При выборе стратегий (A_1, B_1) выигрыш игрока В равен 5, а при выборе стратегий (A_2, B_2) его выигрыш равен 1.

Это говорит о том, что первый рынок более выгоден, то есть удобно расположен, хорошо посещаем и т.д. Проигрыш игрока *A* при выборе стратегий (A_1, B_1) равен -10, а при выборе стратегий (A_2, B_2) -1. Если фирмы выберут разные рынки, то при выборе стратегий (A_1, B_2) выигрыш игрока *A* равен 2, а при выборе стратегий (A_2, B_1) его выигрыш равен 1. Здесь игрок *A* выигрывает больше на более выгодном рынке. Потери, которые несет при этом игрок *B,* оказываются прямо противоположными. Определить параметры равновесной ситуации.

Р е ш е н и е. По формулам

$$C = a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21}, \qquad \alpha = a_{22} - a_{12},$$
$$D = b_{22} - b_{12} + b_{11} - b_{21}, \qquad \beta = b_{22} - b_{21}. \quad (2.14)$$

рассчитаем коэффициенты C, α, β, D: р.

$C = a_{22} - a_{12} + a_{11} - a_{21} = -1 - 2 - 10 - 1 = -14;$

$\alpha = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3;$

$D = b_{22} - b_{12} + b_{11} - b_{21} = 1 + 2 + 5 + 1 = 9;$

$\beta = b_{22} - b_{21} = 1 + 1 = 2.$

Подставим полученные значения в систему

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)\geq 0,\\ p(Cq-\alpha)\geq 0,\\ (q-1)(Dp-\beta)\geq 0,\\ q(Dp-\beta)\geq 0,\\ 0\leq p\leq 1\\ 0\leq q\leq 1\end{cases}\qquad (2.13)$$

получим

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)=(p-1)(-14q+3)\geq 0\\ p(Cq-\alpha)=p\,(-14q+3)\geq 0\end{cases},\qquad (2.14)$$

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta)=(q-1)(9\text{p}\,-\,2)\geq 0,\\ q(Dp-\beta)=q(9\text{p}\,-\,2)\geq 0.\end{cases}\qquad (2.15)$$

Рассмотрим сначала пару неравенств (2.14) для трех различных случаев: $p=1, p=0, 0<p<1$.

Для первого случая $p=1$ получим:

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)=0(-14q+3)=0\geq 0\\ p\,(-14q+3)\geq 0\end{cases},$$

Из второго неравенства находим:

$$-14q+3\geq 0; 3\geq 14q \text{ или } q\leq\frac{3}{14}\qquad (2.16)$$

Для второго случая $p=0$ и

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)=-p(-14q+3)\geq 0\\ 0\,(-14q+3)=0\geq 0\end{cases}$$

Из первого неравенства находим

$$14q\geq 3 \text{ или } q\geq\frac{3}{14}\,.\qquad (2.17)$$

Для третьего случая $0<p<1$ получим

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)\geq 0\\ p\,(-14q+3)=0\geq 0.\end{cases}$$

Отсюда находим $14q-3\geq 0$ и $-14q+3\geq 0$.

Выполнение этих двух неравенств одновременно возможно лишь при

$$q = \frac{3}{14} \qquad (2.18)$$

Полученные результаты изображены на рис. 1.

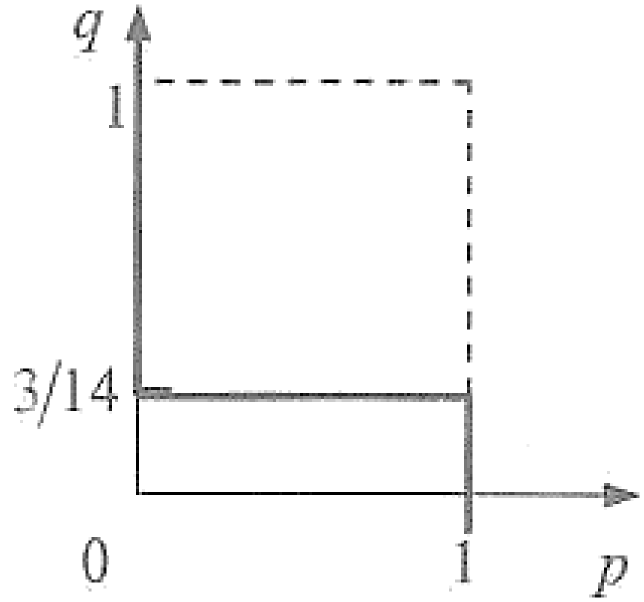


Рисунок 1

На рис. 1 выделен единичный квадрат, соответствующий неравенствам $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$.

Для первого случая $p = 1$ имеем

$$q \leq \frac{3}{14}.$$

На рис. 1 это луч, идущий из точки с координатами $\left(1, \frac{3}{14}\right)$ вниз.

Для второго случая $p = 0$ и $q \geq \frac{3}{14}$

На рис. 1 это луч, идущий из точки с координатами $\left(0, \frac{3}{14}\right)$

верх.

Для третьего случая $0 < p < 1$ получили $q = \frac{3}{14}$.

Это горизонтальный отрезок на интервале $0 < p < 1$.

Получили зигзаг, выделенный полужирной линией. Нас интересует та часть зигзага, которая попала в выделенный единичный квадрат.

Рассмотрим теперь пару неравенств (2.15) для трех различных случаев

$$q = 1, \qquad q = 0, \qquad 0 < q < 1.$$

Для первого случая $q = 1$ найдем

$$\begin{cases} (q-1)(9p-2) = 0(9\text{p} - 2) = 0 \geq 0, \\ 9p - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства получим $9p \geq 2$ или $p \geq \frac{2}{9}$

Для второго случая $q = 0$ и $p \leq \frac{2}{9}$ а для третьего случая $0 < q < 1$ имеем $p = \frac{2}{9}$

Полученные результаты изображены на рис. 2 Так же, как и в предыдущем случае, получили зигзаг, выделенный полужирной линией. Результаты объединения рис. 1, 2 представлены на рис. 3.

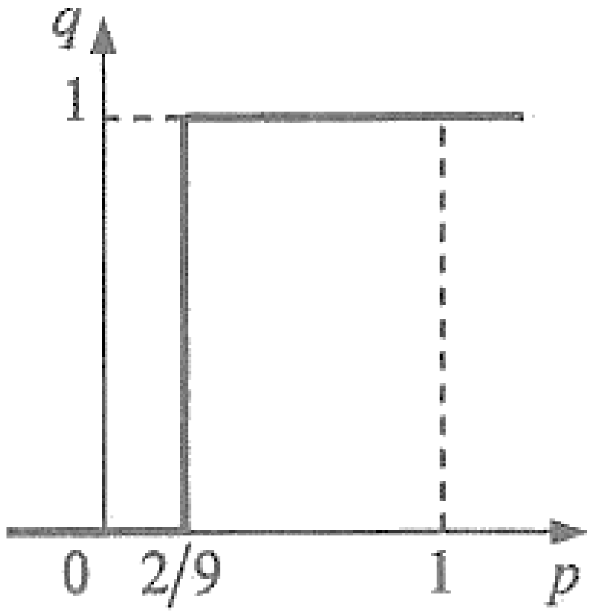


Рисунок 2

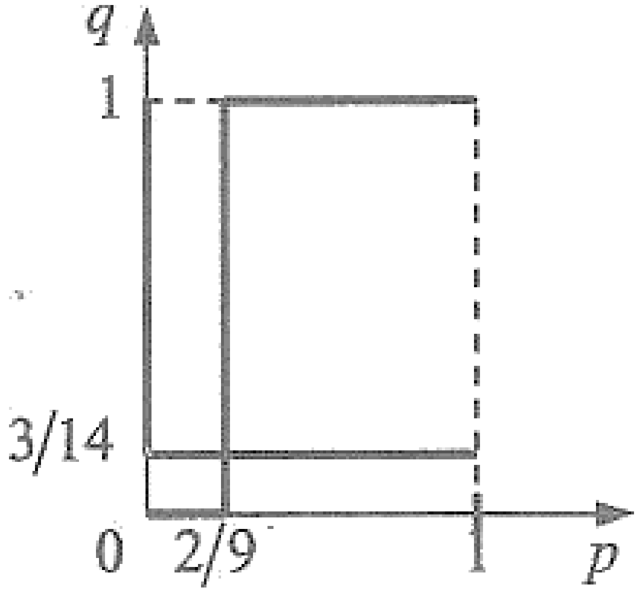


Рисунок 3

Точкой равновесия является общая точка построенных зигзагов. Ее координаты равны $\left(\frac{2}{9}, \frac{3}{14}\right)$.

Тогда смешанные стратегии игроков имеют вид

$P = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right), Q = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

Средние выигрыши игроков определим по формулам (2.12):

$$\begin{cases} E(A, p^*, q^*) = -10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} + \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} - \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = -\frac{4}{7}, \\ E(B, p^*, q^*) = 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} - \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} + \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Модели, связанные с дилеммой заключенных

В экономике существует множество моделей, основанные на теории игр. В их основе лежит учёт того обстоятельства, что фирмы в условиях олигополии ведут себя, как игроки на поле, когда действия одного игрока зависят от реакции другого. Эти модели в экономике описывают ситуацию расчёта объёма производства и цены одного из участников конкуренции в зависимости от рыночного поведения другого участника рынка.

Олигополисты при установлении цены на конкурентном рынке сталкиваются с *дилеммой заключённых***.** Это классический пример теории игр в экономике. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Двух заключённых обвинили в совместном совершении преступления. Они находятся в отдельных тюремных камерах и не могут поддерживать связь друг с другом.

Если оба участника сознаются, то получат по **5** лет. Если оба не сознаются, то дело не будет доведено до конца и каждый участник получит по **2** года.

Если один сознается, а другой нет, первый получит **1** год, а другой **- 10** лет.

Построим матрицу возможных результатов:

+ признался, - не признался.

+	-
5\5	1\10
10\1	2\2

Перед заключенными стоит дилемма: признаваться или не признаваться в совершении преступлении. Если бы они могли договориться, чтобы не признаваться, то они бы не признались и получили по 2 года. Но, если такая возможность была бы , они не могут доверять друг другу. Если один не признается, то он рискует ,что другой этим воспользуется. Поэтому, чтобы не делал первый, второму всегда выгоднее признаться. Тогда, вероятнее всего, признаются оба и получат по 5 лет.

Олигополисты – участники конкурентного рынка, часто сталкиваются с дилеммой заключенных. Рассмотрим примеры.

Пример 2. Две фирмы являются единственными продавцами на рынке. Они сталкиваются с дилеммой какую цену установить *высокую или низкую?*

Если они договорятся и установят оба высокую цену, то получат по 20 млн. руб. Если оба установят относительно низкую цену, то оба получат по 15 млн. руб. Если одна из фирм установит высокую, а другая низкую цену, то первая получит 10 млн. руб., а другая - 30 млн. руб. (за счёт того, что часть покупки перешла от первой ко второй фирме).Построим матрицу возможных результатов: + высокая цена, - низкая цена.

+	-
20\20	10\30
30\10	15\15

Очевидно, что каждой фирме выгодно установить относительно низкую цену независимо от того, как поступить конкурент, и получить по 15 млн.руб.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Швейная фабрика планирует к осени выпуск двух моделей обуви для работников таможенной службы. Сбыт обуви зависит от состояния погоды осенью. Наблюдения за ряд лет в сентябре показали, что в сухую осень можно сшить и продать 350 пар I модели и 1400 пар II модели. В сырую осень продажа I модели составила 600 пар, II модели – 800 пар. Затраты на пошив 1 пары I модели составили 120 ден. ед., II модели – 48 ден. ед. Цена реализации одной пары I модели – 120 ден. ед., II модели – 120 ден. ед. Найти оптимальную стратегию предприятия, обеспечивающую гарантированную среднюю прибыль.

Задача 2. Для отопления помещения необходимо заготовить летом топливо. Расход топлива и цены на него зависят от состояния погоды в зимнее время (зима мягкая, нормальная, суровая):

	Мягкая	Нормальная	Суровая
Расход топлива, тонн	5	10	18
Цена за тонну топлива, тыс. руб.	10	16	20

В летнее время топливо можно купить по цене 10 тыс. руб., а излишки можно продать весной. Составить оптимальную стратегию заготовки топлива.

Задача 3. Швейное предприятие шьет форменные шапки и фуражки для работников таможенной службы. Головные уборы реализуются через магазин, объем реализации зависит от погоды. По данным наблюдений прошлых лет в условиях теплой осени можно продать 200 шапок и 800 фуражек, а при холодной – 300 шапок и 270 фуражек. Затраты на пошив шапки и фуражки составляют соответственно 120 и 20 составляют ден. единиц. Цена реализации 210 и 30 ден. ед. Составить оптимальную стратегию предприятия, обеспечивающую при любой погоде среднюю гарантированную прибыль.

IV. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

4.1. Задача определения эффективных норм выработки

Для эффективного решения задач нормирования труда следует применять методы математической статистики. Для решения данной задачи применим метод выборочного наблюдения.

Пример 1.На предприятии, по данным 10% выборочного обследования выполнения норм выработки, среднее перевыполнение норм 25 рабочими составила 12%, при среднеквадратическом отклонении 1,5%. Найдем с вероятностью 0,954 доверительный интервал средней выполнимости норм выработки. Здесь $m = 25; \quad \tilde{x} = 12\%; \quad \sigma_b = 1.5\%; \quad F(t) = 0.954; \quad t = 2.$

Следовательно,

$$\mu = \frac{15}{\sqrt{25}} = 0{,}3\%; \quad \Delta = 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}6\%. \quad \Delta_{\%} = (0{,}6 : 12)100 = 5\% .$$

Доверительный интервал $12 - 5 \le \tilde{x} \le 12 + 5$.

Итак, с вероятностью 0,954 можно утверждать, что среднее перевыполнение норм выработки рабочими в день обследования находится в пределах от 7 % до 17%.

Если при выборочном наблюдении изучению подлежит альтернативный признак, то случайная ошибка выборки для доли определяется по формуле: $\mu = \sqrt{\frac{\rho q}{n}}$, где ρq- дисперсия альтернативного признака в генеральной совокупности. Так как ρq - неизвестно, то в практике ее заменяют дисперсией выборочной совокупности $\omega(1-\omega)$и формула принимает вид $\mu = \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$. Например, если известно, что при выборочном наблюдении 100 рабочих (1% случайный отбор) у 40% из них производственный стаж оказался более 5 лет, то стандартная ошибка выборки составит $\mu = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}} = 0{,}049$, или 4,9%, а предельная ошибка с вероятностью 0,954 равна: $\Delta = 2 \cdot 0{,}049 = 0{,}098$ или 9,8%. Следовательно, доверительный интервал (6%) таков: 40,0-9,8 $\le \rho\% \le 40{,}0 + 9{,}8$, т.е. с вероятностью 0,954 можно утверждать, что в генеральной совокупности долю рабочих с производственным стажем более 5 лет можно ожидать в пределах от 30,2% до 49,8%.

Для определения необходимого объема выборочных наблюдений (количество рабочих или рабочих мест) методом фотографий можно использовать приводимую ниже формулу: $n = \dfrac{t^2 \cdot \sigma^2 \cdot N}{\Delta^2 \cdot N + t^2 \cdot \sigma^2}$, где n-число выборочной совокупности; N численность генеральной совокупности; t-коэффициент, зависящий от вероятности, с которой гарантируется заданная точность выборки; Δ^2- предельная ошибка выборки; σ^2-дисперсия величины выборочной совокупности.

<u>Пример 2</u>. На заводе работает 100 токарей. Определим, сколько человек надо охватить наблюдением при нормировании труда. При этом принимаем $\varepsilon = 0{,}3,$ а $t = 3$ (коэффициент t находится по таблице). Ориентировочно принимаем что из 100 токарей необходимо охватить (в первом приближении) наблюдением (n_1). Исходные данные:

Кол-во токарей	Разброс величины потерь времени в среднем за смену, час	$Y - \bar{Y}$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	0,9	0,57	0,32
2	2,0	0,53	0,28
3	2,3	0,83	0,69
4	1,1	0,37	0,14
5	2,1	0,63	0,40

6	1,6	0,13	0,017
7	1,4	0,07	0,0049
8	1,1	0,37	0,14
9	2,2	0,73	0,53
10	0,7	0,77	0,59
11	0,8	0,67	0,45
12	2,0	0,33	0,28
13	1,8	0,33	0,11
14	0,8	0,67	0,45
15	1,2	0,27	0,073
Итого	22.0	-	4.475

Используя данные таблицы, определим значения:

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{22}{15} = 1{,}47; \quad \sigma^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n_1} = \frac{4{,}475}{15} = 0{,}30$$

Подставляя значения t и σ^2 в формулу. получим: $n_2 = \dfrac{3^2 \times 0.30 \times 100}{(0{,}3)^2 \times 100 + 3^2 \times 0{,}30} = \dfrac{270}{11{,}7} = 23$ человека. Для обеспечения заданной точности необходимо обследовать не 15 токарей, а 23.

На предприятиях или в цехах с небольшой численностью рабочих величину внутрисменных потерь рабочего времени можно получить следующим методом. Для этого фотографии следует проводить выборочно в течение трех дней месяца (по одному дню в каждой декаде) с охватом 30-50% рабочих разных специальностей, занятых соответственно в первой, второй и третьей сменах. Полученные данные распространяются на остальную часть рабочих и все рабочие дни месяца. Тогда возможная сумма внутрисменных потерь рабочего времени за месяц может быть рассчитана по формуле: $t_1 = t_1' \cdot \dfrac{P_0 \cdot m}{4}$,

где t_1 - общая сумма потерь рабочего времени по той или иной причине за месяц, час;

t_1' -сумма потерь рабочего времени за дни обследования по охваченной группе рабочих по той же причине, час;

P_0 -общее число рабочих на объекте, человек;

m -число рабочих дней в месяце;

n - число рабочих, охваченных фотографиями за все дни, человек.

<u>Пример 3</u>. P_0= 150 человек, m=21 день, 4=70 человек. Сумма потерь рабочего времени из-за недостатков в организации труда за дни обследования по группе охваченных рабочих t_1'=168 час. Тогда общая сумма потерь рабочего времени по указанной причине в целом по цеху составить: $t_1 = 168 \times \frac{150 \cdot 21}{70} = 7560$ час.

Необходимую численность выборки можно определить так. Допустим, на предприятии решено уточнить нормы выработки на некоторой операции. Требуется определить, сколько должно быть проведено хронометражных наблюдений, чтобы ошибка при установлении новых норм выработки не превышала, скажем 5%. По предыдущим наблюдениям известно, что дисперсия фактической выборки $\sigma^2 = 16$ кг, а средняя выработка $\bar{x} = 40$кг. Необходимую численность наблюдений n определяем по формуле: $n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}$**,** где ε - размер допустимой ошибки выборки (4).

Так как ошибка в задаче задана в %, формулу (4) расчета запишем так: $n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2 \%}$, где, $V\%$ - коэффициент вариации, исчисляемый по формуле $V\% = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{16}}{40} \cdot 100 = 10\%$ (5).

При вероятности 0,96 значение $t = 1{,}96$ (по таблице), тогда необходимую численность выборки находим по формуле

$$n = \frac{t^2 \cdot V^2\%}{\varepsilon^2\%}; \quad n = \frac{1.96^2 \cdot 10^2}{5^2} = 15{,}3\,.$$

Следовательно, для уточнения норм выработки необходимо провести

15-16 хронометражных наблюдений.

Выборку, объем которой находится в пределах от 5 до 30 единиц, принято считать малой выборкой. Особенность малой выборки состоит в том, что ее случайные ошибки не подчиняются закону нормального распределения .Отметим, что чаще всего малой выборкой пользуются, например, при статическом исследовании качества промышленной продукции, при установлении норм выработки.

Пример 4. Предположим, что на заводе с целью проверки выполнения норм выработки организована малая выборка:

Выполнение норм выраб. x_i	Число рабочих f_i	$x_i \cdot f_i$	$X_i - \overline{X}$	$(x_i - \widetilde{x})^2$	$(x_i - \widetilde{x})^2 \cdot f_i$
148	2	296	2,6	6,76	13,52
150	4	600	0,6	0,36	1,44
152	3	456	1,4	1,96	5,88
154	1	154	3,4	11,56	11,56
Итого:	10	1506	х	х	32,40

В случайном бесповторном порядке отобрано 10 рабочих. Выборочная средняя $\widetilde{x} = 1506 : 10 = 150{,}6\%$. Выборочная дисперсия $\mu^2_{м.b} = 32{,}4 : 10 = 3{,}24$, стандартная ошибка $\mu_{м.b} = \sqrt{\frac{3{,}24}{9}} = 0{,}6\%$.В условиях малой выборки при $k = n - 1 = 9$ и $t = 2{,}5$ с вероятностью $P_k|t|$, равной 0,966, предельная ошибка по абсолютной величине будет не больше $\Delta_{м.b} = 2{,}50{,}6 = 1{,}5\%$. Вероятность того, что это утверждение неправильно и ошибка может быть больше, чем 1,5%, равна: 1-0,966=0,034.

Доверительный интервал, в котором находится значение генеральной средней, можно определить как $\widetilde{x} \pm 1{,}5\%$, т.е. 150,6-1,5$\leq \overline{x} \leq 150{,}6 + 1{,}5$, генеральная средняя лежит в интервале от 149,1% до 152,1%.

Некоторые задачи по нормированию труда достаточно эффективно можно решать **методом Монте-Карло.** Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин.

Решим задачу на установление норм времени в условном цехе с помощью метода Монте-Карло.

Пример 5. Допустим в сборочном цехе 50 рабочих заняты сборкой изделия **А**. Для оплаты труда рабочих-сборщиков необходимо установить сдельные расценки, а для этого необходимо сначала разработать нормы времени **X**. Поскольку рабочие имеют разную производительность труда, нормы времени также будут разные. Поэтому сначала объединим рабочих в пять групп по уровню производительности труда (выработке): 5,8,26,7,4, итого 50 чел.

Затем, используя метод Монте-Карло, определим средневзвешенную норму времени для рабочего-сборщика. Расчеты проведём в таблице:

Показатели	I гр.	II гр.	III гр.	IV гр.	V гр.	Всего
Количество рабочих, чел.	5	8	26	7	4	50
Доля в общей числен (**р**)	0,10	0,16	0,52	0,14	0,08	1,0
Норма времени (**х**),ч/шт.	2,1	2,0	1,8	1,7	1,5	1,83
Выработка , шт./час	3,8	4,0	4,4	4,7	5,3	4,4

Средневзвешенная норма времени рассчитанная традиционным методом составит:

$\bar{X}$ =ΣX*P=2,1x0,1+2,0x0,16+1,8x0,52++1,7x0,14+1,5x0,08=1,83час/шт.

Далее рассчитаем норму времени, используя метод Монте-Карло:

1) разобьем интервал [0,1] оси ОХ на частные интервалы с координатами: 0,10; 0,10+0,16=0,26; 0,26+0,52=0,78; 0,78+0,14=0,92; 0,92+0,08=1 т.е. (0,10; 0,26); (0,26; 0,78); (0,78; 0,92); (0,92; 1);

2) выпишем из таблицы случайных чисел девять чисел: 3,2; 0,17; 0,9;0,5; 0,97; 0,69; 0,23; 0,46; 0,14;
3) определим возможные значения случайной величины **X** по известной процедуре**:** 2,0; 2,1; 1,7; 2,0; 1,7; 2,0; 2,1; 2,0; 2,1.
4) рассчитаем средневзвешенную норму времени. Она составит 1,97 час/чел., т.е. на 0,14 нормо-часа больше, чем рассчитанная традиционным методом.

Норма времени, рассчитанная методом Монте-Карло, будет технически обоснованным, так как здесь соблюдается принцип случайности отбора.

4.2 Задача использования рабочего времени и оборудования

Для изучения использования рабочего времени и работы оборудования используют **моментные наблюдения.** Особенностью моментного наблюдения является то, что по охвату объекта совокупности оно является сплошным, а по времени – выборочном. Сплошным оно является потому, что учету подлежат все единицы оборудования (или все рабочие). Выборочным оно является по той причине, что из всего фонда времени в наблюдение попадает лишь его часть, т.е. время в течение которого ведется регистрация.

Для определения числа моментов наблюдения воспользуемся формулой $n = \frac{t^2 \sigma_B^2}{\Delta^2}$. Но так как все параметры этой формулы на стадии подготовки наблюдения неизвестны, то σ_B^2 целесообразно принять на уровне максимального значения дисперсии альтернативного признака, равного 0,25. Предельную ошибку Δ при таком расчете принято устанавливать в размере 5% предполагаемого коэффициента потерь: $\Delta = 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}025$. Коэффициент доверия t в практике подобных расчетов принимают равным 2, что гарантирует доверительный результат с вероятностью 0,954. При заданных условиях объем выборки – число станко-моментов составит $n = \frac{2^2 \cdot 0{,}25}{(0{,}025)^2} = 1600$. Предположим, что в результате проведенного моментного наблюдения коэффициент потерь времени в использовании оборудования составил 0,3 или 30%. Предельную ошибку Δможно определить так: $\Delta = 2\sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{1600}} = 0,02$, или 2%.

Доверительный интервал коэффициента потерь времени в генеральной совокупности составит: $30-2 \leq \bar{K}$ потерь % $\leq 30+2$

Это означает, что с вероятностью 0,954 можно утверждать, что потери времени оборудования не меньше 28% и не больше 32%.

Необходимый объем обследования методом моментных наблюдений можно определить по формулам:

а) в условиях массового производства $n = \frac{2(1-K)\times 100^2}{K \cdot \varepsilon^2}$, (2)

где n - объем наблюдений, человека-наблюдений; K-коэффициент загруженности рабочих; ε - допустимая величина относительной ошибки результатов наблюдения;

б) в условиях единичного и мелкосерийного производства:

$$n = \frac{3(1-K)\times 100^2}{K \cdot \varepsilon^2},$$

Пример. Моментные наблюдения проводились в цехе массового производства на 20 рабочих местах станочников. Коэффициент их загрузки был принят на уровне 0,8, а возможная ошибка в результатах наблюдения $\pm 4\%$.Исходя из этих данных, необходимый объем моментных наблюдений составить 312: $n = \frac{2(1-0,8)\times 100^2}{0,8 \cdot 16} = 312$ человеко-наблюдений.

4.3 Модель выбора оптимального варианта внесения инвестиций

Как известно, важнейшей матричной чертой рыночной системы хозяйствования является разветвленная система товаро-денежных отношений. Из этого следует, что движение факторов производства, в том числе рабочей силы, материальных благ и услуг, осуществляется с помощью наличных и безналичных денег, а так же других финансовых инструментов. На практике это означает, что создание любого проекта и его функционирование предполагает вложения определенного капитала в форме соответствующей величины денежных средств (инвестиций).

Для того, чтобы развиваться любая компания должна постоянно вкладывать капитал либо на обновление, либо на расширение производства, либо на то и другое, рассчитывая, что ему в будущем это принесёт определенную прибыль. Но, чтобы не ошибиться в своих расчетах, хозяйствующему субъекту необходимо:

а) исходя из изменения стоимости денег во времени, определить, сколько ему потребуется вложить сегодня, чтобы получить ожидаемую прибыль в будущем;

в) исходя из периодов инвестирования и объёмов инвестиций, прибыльности объектов инвестирования выбрать оптимальный проект инвестиций.

Первая часть проблемы на практике осуществляется методом дисконтирования. Процесс пересчета будущей стоимости капитала в настоящую носит название, дисконтирования, а ставка по которой производится дисконтирование – ставкой дисконта.

Здесь определение временной стоимости денег осуществляется, как правило, на основе вычисления сложного процента, используемого для установления будущих результатов инвестирования [7, с. 300].

Будущая стоимость инвестиций, рассчитанная по методу сложных процентов, ежегодно в этом случае будет составлять:

$Fn = P(1+i) n = PT1 (i; n)$, где

Fn – будущая стоимость, т.е. количество денежных средств, которыми будет располагать предприятие на конец года.

P – инвестиции текущие;

i – годовая ставка процента;

n – количество лет;

$T1$ (i; n) – стоимость 1 руб. с начисленными сложными процентами.

Нужно отметить, что дисконтирование обратно пропорционально будущей стоимости сегодняшнего движения денежных средств. Оно применяется для оценки будущего движения денег в ценностях сегодняшнего дня и используется при прогнозном планировании вложений (инвестиций).

Поэтому формула Fn = P (1+i)n при определении текущей стоимости (P) в ценностях будущего капитала примет следующий вид:

$$P=\frac{Fn}{(1+i)^n} = Pn\ \frac{1}{(1+i)^n} = Fn\ T_3\ (i, n),$$ где

T_3 (i, n) – текущая стоимость 1 руб.

Напомним, что здесь «работает» не только первоначально вложенная сумма, но и процент от неё, появляется эффект сложного процента. Логика сложного процента состоит в том, что все деньги, которые остаются на вкладе, приносят доход.

Начисление процентов может производится несколько раз в течение года. Чем больше периодов начисления процентов в году, тем больше величина дохода [9, с. 278].

Чем выше сегодняшняя стоимость денег на рынке капитала, тем ниже текущая стоимость будущего капитала при одной и той же будущей стоимости. Эта ситуация является базовой при оценке любого инвестиционного проекта. Например, компания рассматривает вопрос о том, стоит ли вкладывать 150 тыс. руб. в проект который через два года приносит доход 200 тыс. руб.

Принято решение, вложить деньги только при условии, что годовой доход от этой инвестиции составит не менее 10% , который можно получить, положив деньги в банк. Чтобы получить через 2 года 200 тыс. руб. компания сейчас должна вложить под 10% годовых 165 тыс. руб. ($200 \times 1/(1+0{,}1)^2 = 165$). Проект дает доход в 200 тыс. при меньшей сумме инвестиций (150 тыс. руб.). Это значит, что ставка дохода превышает 10%. Следовательно, проект является выгодным. Для решения второй части проблемы инвестиций таких расчетов недостаточно, т.к. они не позволяют осуществлять выбор оптимального варианта внесения инвестиций.

Мы предлагаем модель, позволяющая выбрать оптимальный вариант внесения инвестиций с тем, чтобы максимизировать получаемые от этих инвестиций выплаты [1, с. 192].

Рассматривается такая ситуация: имеется ограниченная сумма *(C)* , которую можно распределить между *n* вариантами инвестиций в каждом из *m* периодов времени. Разница между размером выплаты и размером инвестиции в каждом периоде времени есть величины Δ ij, равная (p_{ij} - q_{ij}), где p_{ij} - средняя выплата, получаемая в период j от инвестиций i, q_{ij} - размер инвестиций i, которая осуществлена в период времени j.

Отметим, что величина (Δ ij) случайная, дисперсия этой величины σ_{ij}^2, предполагается известной. А также особенностью данной дискретной модели является то, что для формулировки задачи в рассмотрение вводится булева переменная, т.е.

$X_i = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$ 1 – если инвестиция i выбрана; 0 – если инвестиция i не выбрана; i = 1 … n [4, с. 63].

Исходя из предположения, что законы распределения нормальны и независимы, вычисляется сумма получаемых выплат (за вычетом внесенных инвестиций) и суммарная дисперсия для каждого варианта распределения инвестиций по периодам:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \; (p_{ij} - q_{ij}), \quad j = 1 \dots m, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; \sigma_{ij}^2 , \quad j = 1 \dots m. \quad (2)$$

Через C_j обозначается наличная сумма, имеющаяся в распоряжении в период j . Выбрав некоторую доверительную вероятность α (например α = 0, 95) и найдя по известным формулам коэффициент Ψ (α) (при α = 0, 95;

$\Psi(\alpha)$=1, 64), условия внесения инвестиций и получения выплат выражаются следующим неравенством:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (p_{ij} - q_{ij}) + C_j \geq \Psi(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ij}^2} \qquad (3)$$

Содержательный смысл этого условия заключается в том, что сумма всех полученных выплат от всех инвестиций внесенных в период j , т.е. величина $\sum_{i=1}^{n} x_i (p_{ij} - q_{ij})$, в совокупности с количеством имеющихся в наличии или в запасе денег C_j в период j , должна превосходить суммарную «колеблемость» размера получаемых выплат $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ij}^2}$ в этот же период . Иначе говоря, это условие выражает требование, чтобы юридическое лицо, осуществляющее заданные инвестиции, не обанкротилось, т.е. чтобы даже при наихудшем стечении обстоятельств, когда отклонение фактически полученных выплат от ожидаемых будет значительным и в сторону недополучения выплат, имеющегося запаса C_j хватило бы для осуществления намеченных инвестиций.

Условие (3) должно выполняться с вероятностью 95% . Вероятность обанкротиться или, что то же, риск, составляет 5% . Это выражено в величине коэффициента $\Psi(\alpha)$.

При соблюдении этого условия необходимо максимизировать сумму получаемых выплат от всех инвестиций по всем периодам, т.е. максимизировать следующую линейную форму

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} (p_{ij} - q_{ij}) \qquad (4)$$

В совокупности условия (3) и целевая функция (4) и образуют математическую модель рассматриваемой ситуации.

Введем дополнительно следующие обозначения:

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_{ij}),$$

$$f_{j1}(x) = C_j + \sum_{i=1}^{n} x_i p_{ij} ,$$

$$f_{j2}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i q_{ij} + \Psi(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ij}^2}$$

где $j = 1, \ldots, m$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i \in \{0, 1\}$; $i = 1 \ldots n$), и пологая, что $\sum_{j=1}^{m}$ ($p_{ij} - q_{ij}$) ≥ 0 ($i = 1 \ldots n$), сформулируем рассматриваемую задачу инвестиций: максимизировать Z при условиях:

$$Z + f_0(x) = 0,$$

$$f_{11}(x) - f_{12}(x) \geq 0,$$

$$f_{21}(x) - f_{22}(x) \geq 0,$$

……………………….,

$$f_{m1}(x) - f_{m2}(x) \geq 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где $x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$, $i = 1, \ldots, n$ и где каждая функция $f_0, f_{11}, f_{21} \ldots, f_{m2}$ монотонно не убывает по каждому из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4.4 Модели парной корреляционно-регрессионной связи

Модель парной линейной корреляционной связи является одной из наиболее разработанных и часто применяемых при социально-экономических исследованиях. Для корреляционной связи зависимого признака, кроме изучаемых факторов колеблемость вызывается также другими, не включенными в уравнения регрессии факторами, как существенными, так и второстепенными. Измерение тесноты связи определяют с помощью коэффициентов и индексов корреляции, которые дают возможность определить долю вариации, вызванной изучаемыми факторами, в общем объеме вариации зависимого признака. Если связь близка к функциональной, то значение коэффициента (индекса) корреляции приближается к единице: чем слабее влияние аргумента на функцию, тем величина коэффициента корреляции ближе к нулю.

Пример 1. Пусть годовая производительность труда (в расчете на одного рабочего) и энерговооруженность на 14 предприятиях одной отрасли характеризуется следующими данными [4]:

Предприятие	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Производительность (Y) труда (тыс.руб. на 1 раб..)	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4
Энерговооруженность (кВт на 1 раб. (X))	2,8	2,8	3,0	2,9	3,4	3,9	4,0	4,8	4,9	5,2	5,4	5,8	6,2	7,0

На основе приведенных данных, используя уравнения [1] и [2], получили необходимые для расчета уравнения регрессии величины:

$\sum$y = 132.9; $\sum$x = 61.8; $\sum$xy = 621.41; $\sum$x2 = 296.8;

$$a = \frac{14 \cdot 621{,}4 - 61{,}8 \cdot 132{,}9}{14 \cdot 296{,}8 - (61{,}8)^2} = 1448; \quad b = \frac{132{,}9 \cdot 296{,}8 - 61{,}8 \cdot 621{,}41}{14 \cdot 296{,}8 - (61{,}8)^2} = 3{,}1.$$

Уравнение парной линейной регрессии с оцененными параметрами имеет вид: $\hat{y}_i = b + a \cdot x_i$; $\hat{y}_i = 3{,}1 + 1{,}448x$.

Это означает, что увеличение энерговооруженности на 1 кВт ведет в среднем к росту производительности труда на 1,448 тыс. руб.

Коэффициент корреляции вычислим по формуле:

$$r = \frac{\sum xy - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - n \cdot \bar{x}^2\right)\left(\sum y^2 - n \cdot \bar{y}^2\right)}} = \frac{621{,}41 - 14 \cdot 4{,}414 \cdot 9{,}493}{\sqrt{\left(296{,}8 - 14 \cdot 4{,}414^2\right)\left(1313{,}95 - 14 \cdot 9{,}49^2\right)}} = 0{,}98$$

Полученное значение коэффициента корреляции указывает на весьма сильную взаимосвязь производительности труда и энерговооруженности.

После получения *r* можно продолжить статистический анализ, исследовав вопрос, в какой мере полученный коэффициент корреляции существенен.

Для проверки существенности при небольшом числе наблюдений применим $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$, где t следует *t*-распределению Стьюдента. Найденное значение *t* сопоставим с табличным значением t_α при *(n-2)* степенях свободы. В нашем примере $t = \frac{098\sqrt{14-2}}{\sqrt{1-0{,}98^2}} = 17{,}05$, в тоже время $t_\alpha = 2{,}179$ при $\alpha = 0{,}95$. Следовательно, данный коэффициент существенно отличается от нуля, чего, впрочем, и следовало ожидать, так как при значениях *r*, близких *k*±1, эта характеристика существенна.

Взаимосвязь зависимой переменной Y с рядом независимых переменных X измерения в целом с помощью коэффициента *множественной корреляции*, который вычисляется следующим образом: $R = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$. Смысл данного коэффициента легко поменять, рассмотрев подкоренное выражение. Чем теснее данные примыкают к линии регрессии, тем больше эта величина. Если линия регрессии полностью описывает зависимую переменную, то R=1, в противном случае $|R|<1$. По данным нашего примера: $R = \sqrt{1 - \frac{2{,}1}{52{,}35}} = \sqrt{1-0{,}04} = 0{,}98$, что говорит о значимости коэффициента. Для успешного выполнения регрессионного анализа необходимо, чтобы коэффициенты корреляции r и R были безусловно значимы, что имело место в нашем примере.

Пример 2. Рассмотрим построение однофакторного уравнения регрессии зависимости производительности труда ***y*** от стажа работы ***x*** по данным табл.1(10 рабочих одной бригады заняты производством радиоэлектронных изделий, данные ранжированы по стажу их работы). Исходя из экономических соображений, стаж работы нами выбран в качестве независимой переменной *x.* Сопоставление данных параллельных рядов признаков *x* и *y* (табл.1) показывает, что с возрастанием признака *x (*стаж*а* работы), растет, хотя и не всегда, результативный признак *y* (производительность труда). Следовательно, между *x и y* существует прямая зависимость, выраженная достаточно ясно.

Для уточнения формы связи между рассматриваемыми признаками используем графический метод. Нанесем на график точки, соответствующие значениям *x, y,* получим корреляционное поле, а соединив их отрезками, — ломаную регрессии (рис.1). Анализируя ломаную линию, можно предположить, что возрастание выработки *y* идет равномерно, пропорционально росту стажа работы рабочих *x*. В основе этой зависимости в данных конкретных условиях лежит прямолинейная связь (см. пунктирную линию на рис.1), которая может быть выражена простым линейным уравнением регрессии: $\hat{y} = a_0 + a_1 x$ Табл.1

Распределение рабочих бригады по выработке и стажу работы

Исходные данные			*Расчетные значения*			
Номер рабочего	*Стаж работы,* годы ***x***	*Выработка рабочего,* шт. ***y***	*x*2	*y*2	*x y*	$\hat{y}_i$
4-й	1	4	1	16	4	4,6
6-й	2	5	4	25	10	5,2
3-й	3	6	9	36	18	5,8
1-й	4	7	16	49	28	6,4
2-й	5	7	25	49	35	7,0
7-й	6	8	36	64	48	7,6
9-й	7	8	49	64	56	8,2
10-й	8	9	64	81	72	8,8

8-й	9	10	81	100	90	9,4
5-й	10	9	100	81	90	10,0
Итого	$\sum x = 55$	$\sum y = 73$	$\sum x^2 = 385$	$\sum y^2 = 565$	$\sum xy = 451$	**73,0**

где $\hat{y}_i$ — теоретические расчетные значения результативного признака (выработки одного рабочего, шт.), полученные по уравнению регрессии; $a0$, $a1$ — неизвестные параметры уравнения регрессии; x — стаж работы рабочих, годы.

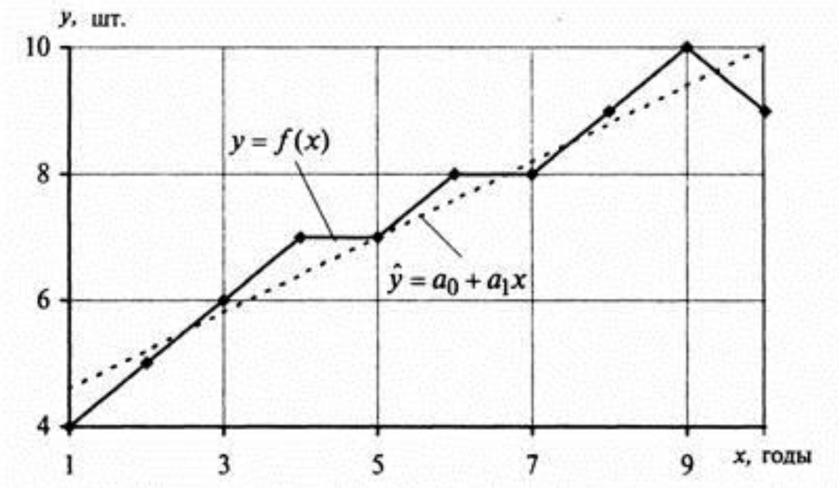


Рис.1. Зависимость выработки одного рабочего *y* от стажа работы x

Пользуясь расчетными значениями (см. табл.1), исчислим параметры для данного уравнения регрессии:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{45,1 - 40,15}{38,5 - 30,25} \approx 0,6;$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \overline{x} = 7,3 - 0,6 \cdot 5,5 = 4,0.$$

Следовательно, регрессионная модель распределения выработки по стажу работы для данного примера может быть записана в виде конкретного простого уравнения регрессии: $\hat{y} = 4,0 + 0,6x$

Это уравнение характеризует зависимость среднего уровня выработки рабочими бригады от стажа работы: при возрастании стажа работы на 1 год выработка повысится на 0,6 штук.

Для практического использования моделей регрессии очень важна их адекватность, т.е. соответствие фактическим статистическим данным. Корреляционный и регрессионный анализ обычно (особенно в условиях так называемого малого и среднего бизнеса) проводится для ограниченной по объему совокупности. Поэтому показатели регрессии и корреляции — параметры уравнения регрессии, коэффициенты корреляции и детерминации могут быть искажены действием случайных факторов. Чтобы проверить, насколько эти показатели характерны для всей генеральной совокупности, не являются ли они результатом стечения случайных обстоятельств, необходимо проверить адекватность построенных статистических моделей.

Значимость коэффициентов простой линейной регрессии (применительно к совокупностям, у которых $n < 30$) осуществляют с помощью *t-критерия Стьюдента.* При этом вычисляют расчетные (фактические) значения t:

для параметра $a0$

$$t_{a_0} = |a_0| \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_{\text{ост}}}; \quad (1.1)$$

для параметра $a1$,

$$t_{a_1} = |a_1| \frac{\sqrt{n-2}}{\sigma_{\text{ост}}} \sigma_x, \quad (1.2)$$

где n — объем выборки; $\sigma_{\text{ост}} = \sqrt{\sum (y - \hat{y})^2 / n}$ — среднее квадратическое отклонение результативного признака y от выравненных значений $\hat{y}_i$ $\sigma_x = \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 / n}$ - среднеквадратическое отклонение факторного признака x от общей средней $\bar{x}$.

Вычисленные по формулам (1.1) и (1.2) значения, сравнивают с критическими t , которые определяют по таблице Стьюдента с учетом принятого уровня значимости α и числом степеней свободы вариации $v=n$-2. Параметр признается значимым (существенным) при условии, если $t_{расч}>t_{табл}$. В таком случае практически невероятно, что найденные значения параметров обусловлены только случайными совпадениями. Для проверки значимости коэффициентов регрессии исследуемого уравнения $\hat{y}=4,0+0,6x$ исчислим t-критерий Стьюдента с v = 10 - 2 = 8 степенями свободы. Вспомогательные расчеты приведены в табл 2.

Таблица 2.

Расчетные значения, необходимые для исчисления δ ост , δ x

$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\hat{y}-\bar{y}$	$(\hat{y}-\bar{y})^2$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
-3,3.	10,89	-2,7	7,29	-0,6	0,36
-2,3	5,29	-2,1	4,41	-0,2	0,04
-1,3	1,69	-1,5	2,25	0,2	0,04
-0,3	0,09	-0,9	0,81	0,6	0,36
-0,3	0,09	-0,3	0,09	0,0	0,0
0,7	0,49	0,3	0,09	0,4	0,16
0,7	0,49	0,9	0,81	-0,2	0,04
1,7	2,89	1,5	2,25	0,2	0,04
2,7	7,29	2,1	4,41	0,6	0,36
1,7	2,89	2,7	7,29	-1,0	1,0
Итого	**32,10**	—	**29,70**	—	**2,40**

Средние квадратические отклонения:

$$\sigma_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{\sum(\hat{y}-y)^2}{n}} = \sqrt{\frac{2,4}{10}} = 0,49; \; \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{385}{10} - \left(\frac{55}{10}\right)^2} = 2,87.$$

Расчетные значения t-критерия Стьюдента:

$$t_{a_0} = 4\frac{\sqrt{10-2}}{0,49} = 23,1; \quad t_{a_1} = 0,6\frac{\sqrt{10-2}}{0,49} \cdot 2,87 = 9,94.$$

По таблице распределения Стьюдента для v = 8 находим критическое значение t-критерия: (tтабл = 3,307 при а = 0,05).

Поскольку расчетное значение tрасч>tтабл, оба параметра a0, a1 признаются значимыми (отклоняется гипотеза о том, что каждый из этих параметров в действительности равен нулю, и лишь в силу случайных обстоятельств оказался равным проверяемой величине).

Проиллюстрируем расчет теоретического корреляционного отношения как меры тесноты связи на примере, для которого по уравнению прямой регрессии $\hat{y} = 4,0 + 0,6x$ найдены значения дневной выработки каждого рабочего.

Теоретическое корреляционное отношение рассчитываем по формуле:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2}} = \sqrt{\frac{29,7}{32,1}} = \sqrt{0,925} = 0,962;$$

Полученное значение теоретического корреляционного отношения свидетельствует о возможном наличии весьма тесной прямой зависимости между рассматриваемыми признаками.

Коэффициент детерминации равен 0,925. Отсюда заключаем, что 92,5% общей вариации выработки в изучаемой бригаде обусловлено вариацией фактора - стажа работы рабочих (и только 7,5% общей вариации нельзя объяснить изменением стажа работы).

Кроме того, при линейной форме уравнения применяется другой показатель тесноты связи - линейный коэффициент корреляции***:***

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \sigma_y},$$ где *n* — число наблюдений.

Используя данные табл.1, рассчитаем линейный коэффициент корреляции $r = \frac{451 - 401,5}{\sqrt{82,5 \cdot 32,1}} = \frac{49,5}{51,46} \approx 0,962.$

Факт совпадений и несовпадений значений теоретического корреляционного отношения η и линейного коэффициента корреляции *r* используется для оценки формы связи.

Посредством теоретического корреляционного отношения измеряется теснота связи любой формы, а с помощью линейного коэффициента корреляции — только прямолинейной. Следовательно, значения η и *r* совпадают только при наличии прямолинейной связи. Несовпадение этих значений свидетельствует, что связь между изучаемыми признаками не прямолинейная, а криволинейная. Установлено, что если разность квадратов η2 и *r*2 не превышает 0,1, то гипотезу о прямолинейной форме связи можно считать подтвержденной. В нашем примере совпадение значений η и r (η = r = 0,962) дает основание считать связь между выработкой рабочих и их стажем прямолинейной.

Показатели тесноты связи, исчисленные по данным сравнительно небольшой статистической совокупности, могут искажаться действием случайных причин. Это вызывает необходимость проверки их *существенности,* дающей возможность распространять выводы по результатам выборки на генеральную совокупность.

Для оценки значимости коэффициента корреляции r используют t-критерий Стьюдента, который применяется при t-распределении. При линейной однофакторной связи t-критерий можно рассчитать по формуле:

$$t_{\text{расч}} = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}},$$

Для коэффициента корреляции между выработкой и стажем работы получим: $t_{\text{расч}} = 0{,}961\sqrt{\frac{10-2}{1-0{,}925}} \approx 9{,}93.$

Это значительно больше критического значения t для n - 2 = 8 степеней свободы и α = 0,01 (tтабл= 3,356),что свидетельствует значимости коэффициента корреляции и существенности связи между выработкой и стажем работы.

Самостоятельная работа

Задача 1. На основании данных об урожайности и себестоимости озимой пшеницы (табл.) требуется: 1) составить и решить уравнение связи; 2) определить по уравнению себестоимость 1 ц пшеницы, которую следует ожидать при различных уровнях урожайности.

№ хозяйства	Себестоимость	Урожайность	Произведение вариант	Квадрат урожайности	Ожидаем. себеть

	y	x	xy	x^2	$\bar{y}x = a - bx$
1.	1,80	15,5	27,900	240,25	1,90
2.	1,69	18,7	31,603	349,69	1,72
3.	1,72	19,0	32,680	361,00	1,70
4.	1,56	23,0	35,880	529,00	1,47
5.	1,61	23,1	37,191	533,61	1,46
6.	1,50	24,5	36,750	600,25	1,38
7.	1,25	26,0	32,500	676,00	1,30
8.	1,30	26,0	33,800	676,00	1,30
9.	1,09	27,5	29,975	756,25	1,21
10.	1,10	28,0	30,800	784,00	1,18
Σ	14,62	231,3	329,079	5506,05	x

Задача 2. Имеются сведения об урожайности и себестоимости 1 ц озимой пшеницы (задача 1). Определить тесноту связи (коэффициент корреляции) между урожайностью и себестоимостью.

Задача 3.

По 14 предприятиям региона изучается зависимость выработки продукции на одного работника Y (тыс. руб.) от ввода в действие новых основных фондов X (% от стоимости основных фондов на конец года):

Номер предприятия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y (тыс. руб.)	7	7	7	7	8	8	8	11	11	11	12	12	13	13
X (%)	3,	3,	3,	4,	4,	4,	5,	6,	6,	7,	7,	7,	8,	8,

	7	7	9	1	2	9	3	3	4	2	5	9	1	4

Постройте линейную модель парной регрессии. Найдите коэффициент парной корреляции. Сделайте выводы.

4.5 Малые выборки в задачах экономики

Малой выборкой принято считать выборку объёмом 5-30 единиц. Особенность малой выборки состоит в том, что её случайные ошибки не подчиняются закону нормального распределения как при большой выборке. Поэтому тут этим законом пользоваться нельзя. Закон распределения случайных ошибок был найден английским ученым Стьюдентом в 1908 году.

Для малой выборки распределение Стьюдента имеет только один параметр-число степеней свободы. Это распределение, как и нормальное, симметрично относительно точки t= 0, но кривая Стьюдента более полога, и её ординаты медленнее приближаются к оси абсцисс, чем ординаты кривой нормального распределения. При увеличении объема выборки, а следовательно, и числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Число степеней свободы равно числу тех индивидуальных значений признаков, которыми нужно располагать для определения искомой характеристики.

При малых выборках расчет средней возможной ошибки основан на выборочных дисперсиях, поэтому для определения предела возможной ошибки выборочного показателя используется формула $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s_x^2}{n-1}}$

При оценке результатов малой выборки величина генеральной дисперсии в расчетах не используется. Поэтому при оценке результатов малой выборки для определения возможных пределов её случайной ошибки пользуются так называемым **t**-критерием Стьюдента:

где $t = \frac{\tilde{x} - \bar{x}}{\mu_{м.в.}}$, $\mu_{м.в.} = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}$ – мера случайных колебаний выборочной средней в малой выборке.

Величина σ вычисляется на основе данных выборочного наблюдения: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \tilde{x})^2}{n}}$

Предельная ошибка малой выборки рассчитывается аналогичным образом: $\Delta_{м.в.} = t * \mu_{м.в.}$

Средняя ошибка малой выборки $\mu_{мв}$ вычисляется по формуле:

$\mu_{мв} \approx \sqrt{\frac{s^2_{мв}}{n}}$, где $s^2_{МВ}$ — дисперсия малой выборки.

При определении дисперсии s^2 число степеней свободы равно **k= n-1**: $s^2_{мв} = \frac{\sum(x_i - \tilde{x})^2}{n-1}$ $t = \frac{\tilde{x} - \bar{x}}{s_{мв}}$. Предельная ошибка малой выборки $\Delta_{мв}$ определяется по формуле $\Delta_{мв} = t\mu_{мв}$.

В малой выборке имеет существенное значение то, что вычисление дисперсии малой выборки производится с учётом числа степеней свободы. Под числом степеней свободы понимается количество вариантов, которые могут принимать произвольные значения, не меняя величины средней /**2**/.

При этом значение коэффициента доверия (t) зависит не только от заданной доверительной вероятности , но и от численности малой выборки (n). Для этих целей используется специальная таблица (таблицы Стьюдента). В этих таблицах даны распределения стандартизованных отклонений.

Как видно из этих таблиц, что при увеличении объёма выборки распределение Стьюдента приближается к нормальному и уже при n=20 оно мало отличается от нормально распределения. Отсюда же видно, что чем меньше объём выборки, тем больше это различие и например, при n=4 это различие весьма существенно. Следовательно, уменьшается точность результатов малой выборки**.**

Величина *t* подчиняется закону распределения Стьюдента (оно верно только для выборок, взятых из генеральной совокупности с нормальным распределением признака). Для определения вероятности *P(t)* пользуются специальными таблицами, в которых рассчитаны величины *P(t)* для данных значений *t* и *k* = *n*—1 (*k* — число степеней свободы).

Независимо от вида выборки, на заключительном этапе исследования определяются доверительные интервалы, в которых может находиться генеральная средняя (для количественных признаков) или генеральная доля (для качественных признаков). Доверительные интервалы – это область тех значений генеральной средней, выход за пределы которой имеет весьма малую вероятность. Доверительные интервалы определяются по формулам:

для средней: $\tilde{x} - \Delta_{\tilde{x}} < \bar{x} < \tilde{x} + \Delta_{\tilde{x}}$; для доли: $w - \Delta_w < \bar{p} < w + \Delta_w$; для малой выборки: $\tilde{x} - \Delta_{м.в.} < \bar{x} < \tilde{x} + \Delta_{м.в.}$

Следует заметить, что так как при малой выборке изучению подвергается небольшое число единиц наблюдения, то это может привести к значительному искажению результатов исследования.

Рассмотрим несколько примеров применения метода малой выборки для решения задач экономики.

Пример1. Для изучения интенсивности труда было организовано наблюдение за 10 отобранными рабочими. Доля работавших все время оказалась равной 0,40, дисперсия 0,4•0,6 = 0,24. По таблице для F(t) = 0,95 t = 2,26 и k =n-1=9. Рассчитаем среднюю ошибку выборки доли работавших все время: $s_p = \sqrt{\dfrac{0,24}{10-1}} = \pm 0{,}16.$

Тогда предельная ошибка малой выборки составит р =2,26*0,16=±0,36. Таким образом, с вероятностью 0,95 доля рабочих, работавших без простоев, в данном цехе предприятия находится в пределах: 39,64% ≤ X≤ 40,36% .

Пример 2. На электроламповом заводе с целью проверки качества ламп организована малая выборка.

Продолжительность горения *x*	Число ламп (f)	xf	x-x	(x –x)2	(x –x)2f
1480	2	2 960	26	676	1352
1500	4	6 000	6	36	144
1520	3	4 560	14	196	588
1540	1	1 540	34	1156	1156
Итого	10	15 060	X	X	3240

В случайном бесповторном порядке отобрано 10 ламп. Результаты проверки и необходимые расчеты приведены в таблице. Выборочная средняя x=15060 : 10= 1506 ч, выборочная дисперсия S2 = 3240 :10 = 324, стандартная ошибка S = √324 : 9 = 6 ч.

В условиях малой выборки при *k* = *n*— 1 = 9 и *t*=2,5 с вероятностью *Ph\t\,* равной 0,966, предельная ошибка по абсолютной величине будет не больше $\Delta_{мв}$ = 2,5-6= 15 ч. Вероятность того, что это утверждение неправильно и ошибка может быть больше, чем 15 ч, равна: 1 —0,966 =0,034.

Пример 3. Допустим, отобрано 10 рабочих для определения времени выполнения ими определённой операции. Среднее время у них оказалось равным 10,4 мин и дисперсия выборки 4 . Примем доверительную вероятность p= 0,984.

По таблице распределения Стьюдента находим t=3. Доверительный интервал 6,4<x<12.4.

Пример 4. Оздоровительный центр рекламируя свои услуги, предлагает за короткий срок снижение веса. По результатам выборочного обследования 15 женщин, воспользовавшихся услугами центра, были получены следующие данные о снижении их веса: **№ n/n**: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

снижение веса, кг: 10,2; 7,6 ;8,4; 6,0; 5,7 ;13,7; 6,9; 5,2; 6,1;5,0; 3,7; 4,7; 3,6; 6,1; 3,2

Необходимо проверить обоснованность таких реклам с вероятностью 0,99 (t=2.977).

Решение:

1) находим выборочное среднее **X**=6,41

2) выборочная дисперсия составляет **S2** = 105,91:(15-1)=7,57

3) средняя квадратическая ошибка выборки равна $\mu_{м.в}$ =0,71

4) находим предельную ошибку $\Delta_{м.в}$.=2,977х0,71=2,12

Отсюда снижение веса пациентов оздоровительного центра будет находиться в пределах от 4,29 до 8,53 кг. Следовательно, указанное в рекламе снижение веса на 10 кг имеет весьма малую вероятность и событие практически не возможное (1-0,99=0,01).

Малые выборки из-за их малочисленности даже при самой тщательной организации наблюдения не дают высокой точности в выводах о показателях генеральной совокупности. Поэтому малые выборки практически редко используются для установления действительной величины генеральной средней или доли, то есть доверительных пределов, в которых могут находиться показатели генеральной совокупности .

Критерий Стьюдента применяется главным образом для решения вопросов *о существенности различий* между показателями выборочной совокупности. Такие задачи возникают при проведении различных опытов, которые всегда представляют некоторую выборку из большого числа возможных случаев и поэтому требуют вероятностной оценки их результатов.

Математические методы прогнозирования урожайности культур

Урожайность культур зависит от многих факторов, и в первую очередь, от количества доступных для растений питательных веществ, нормы высева семян, нормы и качества вносимых удобрений, природных условий и применяемых агротехнических приемов и т.д. Большинство этих факторов не поддаются количественному выражению, что осложняет процедуру прогнозирования урожайности культур.

Расчеты специалистов хозяйств в основном исходят из предложений, интуиции, а это снижает эффективность методов оптимального прогнозирования.

В последних исследованиях ряда известных авторов (Манелля А.И., Хауштейн Г.) для прогнозирования урожайности отдельных культур на уровне совокупности хозяйств все большее применение находят математические модели «экстрополяционного» типа и многофакторные модели. [6,7]

Однако до сих пор в статистической литературе не встречается системный подход к решению вопроса прогнозирования урожайности, т.е. прогнозирование всего ассортимента культур хозяйства, несмотря на сильные колебания урожайности некоторых «плохих» культур.

Исходя из общих правил, советов и указаний по выбору математических моделей, нами разработаны методы прогнозирования урожайности культур. Эти методы испытаны на практике прогнозирования урожайности для ряда предприятий в течение ряда лет и дали неплохие результаты.

Так, для прогнозирования урожайности зерновых культур была получена многофакторная модель:

$Y = 10{,}982+0{,}1297\ X1 +0{,}1008\ X2 +0{,}014\ X3$,

где: X1 – сумма заработной платы на 1 га (руб.),

X2 – стоимость всех удобрений, внесенных на 1 га (руб.),

X3 - количество выпавших осадков на территории хозяйства на март-июль месяцы (мм).

Результаты исследований показывают, что прогнозирование с помощью многофакторных моделей на уровне хозяйства может дать существенный результат в том случае, если имеются за длительный период времени все необходимые данные первичной бухгалтерской документации и сравнительно точно учтены метеорологические условия. Такие данные пока еще довольно сложно получить от каждого хозяйства.

Поэтому определенный интерес может представить использование для прогнозирования урожайности некоторых методов экстраполяции динамических рядов.

При использовании этих методов особую сложность представляет выбор способа сглаживания динамического ряда применительно к видам культур, поскольку динамические ряды урожайностей некоторых культур сильно колеблются по годам. В нашей работе сделана попытка облегчить эту проблему.

Алгоритм прогнозирования урожайности культур таков:

Рассматривается динамический ряд урожайностей (Yi) за n- лет : Y_1, Y_2,…Yi…Yn, где i = 1,2,3…n.

Определяется коэффициент корреляции r между динамическим рядом урожайностей Yi и временным рядом 1,2,3…n по формуле:

$$r = \sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)\left(y_i-\overline{y}\right) / \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{n+1}{2}\right)^2 \times \sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)},$$ где [2]

$\overline{y}$ - средняя урожайность, вычисляемая по формуле: $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n$

Известно, что когда изменение одного какого-либо явления идет в том же направлении что и другое, то коэффициент корреляции может принимать любые значения от 0 до 1. Коэффициент корреляции, равный 0, свидетельствует о полном отсутствии связи. Чем ниже измеряемая связь, тем ниже и коэффициент. Коэффициент $0 < r < 0{,}3$ свидетельствует о слабой связи, $0{,}3 \le r < 0{,}7$ - средней, $r \ge 0{,}7$ - о сильной связи. [8]

Таким образом, становится возможным в зависимости от значения коэффициента корреляции прогнозирование урожайности на (n+k) –ый год вести по трем ветвям – тремя методами:

1. при $r \geq 0{,}7$ применим метод линейной регрессии. В качестве регрессивной функции выберем функцию вида: $y_i = a_0 + a_1 \times i$. По способу наименьших квадратов (МНК) определим значения a_0 и a_1 [3] . Имея значения a_0 и a_1 , получим модель прогноза урожайности на (n+k) - ый год:

$$\widehat{y}_{n+k} = a_0 + a_1 \times (n+k)$$

2. при $0{,}3 \leq r < 0{,}7$ используем метод экспоненциального сглаживания. Процедура прогнозирования по этому методу заключается в следующем:

а) принимаем начальные условия:

$$S_0^{(1)} = S_0^{(2)} + Y_0.$$

б) рассчитываем параметры сглаживания по формулам:

$S_i^{(1)} = LY_i + (1-L) \times S_{i-1}^{(1)}$ - первое сглаживание;

$S_i^{(2)} = LS_i^{(1)} + (1-L) \times S_{i-1}^{(2)}$ - второе сглаживание;

в) принимаем L=0,1;

г) рассчитываем величины a_0 и a_1:

$\alpha_0 = 2S_i^{(1)} - S_i^{(2)}$; $\alpha_1 = S_i^{(1)} - S_i^{(2)}$.

Имея значения a_0 и a_1, получим модель для прогнозирования урожайности на (n+k) - ый год:

$\widehat{Y}_{n+k} = \alpha_0 + \alpha_1 \times Z$, где Z =1,2,3… (n+k).

3. В случае $r \leq 0{,}3$ применим метод скользящих средних.

Динамический ряд урожайностей Y1, Y2,…Yi…Yn сначала сглаживается по m – летним (лучшее сглаживание получается при m =5), т.е. для каждых m последовательных уровней урожайностей подсчитывается средняя урожайность. Вычислив значение средней урожайности для первых m уровней, переходим к расчету средней для уровней Y_2 …,Y_{m+1} ,затем Y_3 … Y_{m+2} и т.д. Количество групповых средних $\widehat{Y}_p$ будет равно p , где p =k-m+1.

Далее вычисляется прирост (+) или снижение (-) средних урожайностей, затем – сумма S этих отклонений. Имея значения S, p, $\widehat{Y}_p$, получим модель для прогнозирования урожайности на (n+k) - ый год: $\widehat{Y}_{n+k} = \widehat{Y}_p + \frac{S}{P} \times \kappa$, где к=5. Для оценки меры близости расчетных урожайностей к фактическим будем пользоваться величиной среднеквадратической ошибки: $\delta_y = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n}}$,

где Y_i - фактическая урожайность. $\widehat{Y}_i$ - расчетная урожайность. Данные о фактическом уровне урожайности культур приведем в таблице (ц/га):

Кул ь- / годы	А	Б		Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л
1987	8,9	10,4	7,6	10,3	98,8	52,0	44,7	12,1	46,7	0,9	4,5
1988	8,5	13,8	8,0	6,0	165,0	58,0	52	13	30	0,57	5
1989	8,0	10,8	8,8	6,8	109,5	64,2	50	17	40	0,58	9
1990	7,5	7,8	10,1	7,6	43,6	80,4	50,3	21	60	0,6	13,1
1991	11,7	11,4	7,7	7,8	57,1	34,0	97,5	16,9	61,2	0,7	4,7
1992	9,4	6,0	12,1	9,9	141,0	86,6	55	18,5	77	1,13	7,7
1993	10,9	11,6	18,5	15,8	101,0	64,1	87,8	19,8	193,7	0,7	7
1994	11,1	13,5	11,1	12,9	123,8	348	71	24,9	134	1,8	7,6
1995	16,5	11,0	26,4	22,7	99,7	513,8	101,7	17	99,3	1,2	7
1996	25,8	19,8	30,0	26,5	192,0	446,1	117,7	33,7	197	2	14,2
1997	23,7	14,6	30,6	31,6	253,0	334,0	107	31,2	127	0,8	6,4
1998	23,6	27,0	33,9	31,4	222,2	188,0	100	33,7	174,8	1,5	6,9
1999	27,8	26,2	33,3	25,3	131,8	358	174	33,2	106	0,7	6,4
2000	25,6	26,6	26,1	27,7	98,0	90	179	38,2	174	1,56	9,2
В ср.	15,6	14,5	18,9	17,3	131,2	195,9	92	23,6	108,6	1,1	7,8

По всем культурам сначала вычисляется коэффициент корреляции r, затем выбирается метод прогноза :

Культура	Значение коэффициента r	Оценка тесноты связи	Метод прогноза
А	0,9097	Сильная	Линейная регрессия
Б	0,7784	Сильная	Линейная регрессия
В	0,8983	Сильная	Линейная регрессия
Г	0,9024	Сильная	Линейная регрессия
Д	0,4153	Средняя	Экспонен. сглаживание
Е	0,5636	Средняя	Экспонен. сглаживание
Ж	0,8812	Сильная	Линейная регрессия
З	0,9133	Сильная	Линейная регрессия
И	0,7582	Сильная	Линейная регрессия
К	0,4041	Слабая	Экспонен. сглаживание
Л	0,1822	Плохая	Скользящие средние

В результате использования фактических урожайностей в хозяйствах за 14 лет, получены следующие модели прогнозирования на 2005 год:

1) для культуры А: $\hat{Y}_{2005}$ = 2,86+1,7×19=32,3ц/га; δ_y= 3,1ц r =0,9097 (метод линейной регрессии)

2) для культуры Д: $\hat{Y}_{2005}$=150,3+19,3×6=265,5ц/га; δ_y=29,1ц r =0,4153 (экспоненциальное сглаживание)

3) для культуры Л: $\hat{Y}_{2005}=8{,}4+\frac{1{,}1}{9}\times 5$ =9,0ц/га; δ_y=1,02ц r =0,1822 (метод скользящих средних).

Приведенный выше способ прогнозирования позволяет сделать первый шаг в исследовании тенденции уровня урожайности культур. Поэтому полученные результаты прогнозирования прежде, чем применить в экономических расчетах, следует сопоставить с многолетними средними урожайностями, урожайностью на сортоучастке. Может возникнуть вопрос, почему приемлемы для прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур математические модели «экстраполяционного» типа? Экстраполяция во времени предполагает, что установленная тенденция в прошлом будет сохраняться и в будущем. Такой подход к характеру течений экономических явлений и процессов возможен благодаря тому, что последние в определенной степени стабильны. Это является следствием равномерного и постоянного научно-технического прогресса. Поэтому тенденция уровня урожайности к постоянному повышению дает возможность для прогнозирования использовать математические модели, описывающие тенденцию во времени в виде уравнений и позволяющие определять ожидаемое значение уровня урожайности в будущем. [5]

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дж.Бигель. Управление производством. Количественный подход (Пер. с англ.). – М, Мир, 1973.
2. Гасс С. Линейное программирование. – М.: Физматгиз, 1961.
3. Дж. Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М, Мир, 1967.
4. Бирман И. Оптимальное программирование. – М.: Экономика, 1968.
5. Дж.Хедли. Линейная алгебра (для экономистов).–М.: Высшая школа, 1966.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. – М.: Сов. радио, 1966.
7. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1985.
8. Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло). – М.: Физматгиз, 1962.
9. Ланкастер К. Математическая экономика. – М.: Советское радио, 1972.
10. Канторович Л.В. Оптимальные решения в экономике. –М, Наука, 1972.
11. Хруцкий Е.А. Экономико-математические методы. –М, Экономика, 1976.
12. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. –М,ВШ, 2005.
13. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. –М, Статистика,1972.
14. Просветов Г.И. Математические методы в экономике. –М, РДЛ, 2005.
15. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М,2012,
16. Балашевич В.А. Математические методы в управлении производством. – М.: ВШ, 1976.
17. Крамер Н.Ш. Высшая математика для экономистов.-М, Юнити, 2016.
18. Кондаков Э.П. Дробно-линейное программирование. –М, МГУ, 2003.
19. Бальшакова Л.В. Теория вероятностей для экономистов.-М, ФиС, 2009.
20. Боташев Р.А. Статистика. КЧГУ, 2013.

21. Френкель А.А. Математические методы анализа динамики и
22. прогнозирования производительности труда. –М, Экономика,1972
23. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования М., Статистика, 1977.
24. Гойзман Э.И. Построение и анализ регрессионных зависимостей. М., 1979.
25. Заварыкин В.М. Численные методы. - М., Просвещение, 1991.
26. Линейное программирование. Учебное пособие / И. А. Палий. — М.: Эксмо, 2008.
27. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: Учеб. пособие для вузов. - М.: Высш. школа, 1982
28. Карташевский В.Г. Основы теории массового обслуживания. М.: Радио и связь, 2006
29. Г и х м а н И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. Изд. 2-е, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977
30. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987
31. Колемаев В.Л., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ИНФРА-М, 2000
32. Васин А.А., Морозов В.В. "Введение в теорию игр с приложениями к экономике "(учебное пособие). М, 2003
33. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры.М, Наука, 1984.
34. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, Книжный дом ’’Университет”,2008
35. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972
36. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
37. Ашманов С.А. Линейное программирование. - М.: Наука, 1981

38. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М, Наука, 1991
39. Горелик В.А. Теория игр и исследование операций. М: Изд-во МИНГП, 1978.
40. Давыдов Э.Г. Исследование операций. М.: Высшая школа, 1990.
41. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Советское радио, 1964.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,-3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3010	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0203	0203	0198	0194	0189	0184	0180

2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081

* Значения ординат увеличены в 10 000 раз.

Приложение 2

Удвоенная нормированная функция Лапласа

$$\Phi_{(t)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,00000	0,30	0,23582	0,60	0,45149	0,90	0,63188
01	00798	31	24344	61	45814	91	63718
02	01596	32	25103	62	46474	92	64243
03	02393	33	25860	63	47131	93	64763
04	03191	34	26614	64	47783	94	65278
05	03988	35	27366	65	48431	95	65789
06	04784	36	28115	66	49075	96	66294
07	05581	37	28862	67	49714	97	66795
08	06376	38	29605	68	50350	98	67291
09	07171	39	30346	69	50981	99	67783
0,10	0,07966	0,40	0,31084	0,70	0,51607	1,00	0,68269
11	08759	41	31819	71	52230	01	68750
12	09552	42	32552	72	52848	02	69227
13	10348	43	33280	73	53461	03	69699
14	11134	44	34006	74	54070	04	70166
15	11924	45	34729	75	54675	05	70628
16	12712	46	35448	76	55275	06	71086
17	13499	47	36164	77	55870	07	71538
18	14285	48	36877	78	56461	08	71986
19	15069	49	37587	79	57047	09	72429
0,20	0,15852	0,50	0,38292	0,80	0,57629	1,10	0,72867
21	16633	51	38995	81	58206	11	73300
22	17413	52	39694	82	58778	12	73729
23	18191	53	40389	83	59346	13	74152

24	18967	54	41080	84	59909	14	74571
25	19741	55	41768	85	60468	15	74986
26	20514	56	42452	86	61021	16	75395
27	21284	57	43132	87	61570	17	75800
28	22052	58	43809	88	62114	18	76200
29	22818	59	44481	89	62953	19	76595

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
1,20	0,76986	1,55	0,87886	1,90	0,94257	2,25	0,97555
21	77372	56	88124	91	94387	26	97618
22	77754	57	88358	92	94514	27	97679
23	78130	58	88589	93	94639	28	97739
24	78502	59	88817	94	94792	29	97798
25	78870	1,60	0,89040	95	94882	2,30	0,97855
26	79233	61	89260	96	95000	31	97911
27	79592	62	89477	97	95116	32	97966
28	79945	63	89690	98	95230	33	98019
29	80295	64	89899	99	95341	34	98072
1,30	0,80640	65	90106	2,00	0,95450	35	98123
31	80980	66	90309	Q1	95557	36	98172
32	81316	67	90508	02	95662	37	98221
33	81948	68	90704	03	95764	38	98269
34	81975	69	90897	04	95865	39	98315
35	82298	1,70	0,91087	05	95964	2,40	0,98360
36	82617	71	91273	06	96060	41	98405
37	82931	72	91457	07	96155	42	98448
38	83241	73	91637	08	96247	43	98490
39	83547	74	91814	09	96338	44	98531
1,40	0,83849	75	91988	2,10	0,96427	45	98571
41	84146	76	92159	11	96514	46	98611
42	84439	77	92327	12	96599	47	98649

43	84728	78	92492	13	96683	48	98686
44	85013	79	92655	14	96765	49	98723
45	85294	1,80	0,92814	15	96844	2,50	0,98758
46	85571	81	92970	16	96923	51	98793
47	85844	82	93124	17	96999	52	98826
48	86113	83	93275	18	97074	53	98859
49	86328	84	93423	19	97148	54	98891
1,50	0,86639	85	93569	2,20	0,97219	55	98923
51	86696	86	93711	21	97289	56	98953
52	87140	87	93852	22	97358	57	98983
53	87398	88	93989	23	97425	58	99012
54	87644	89	94124	24	97491	59	99040

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
2,60	0,99068	2,95	0,99682	3,30	0,99903	3,65	0,99974
61	99095	96	99692	31	99907	66	99975
62	99Г21	97	99702	32	99910	67	99976
63	99146	98	99712	33	99913	68	99977
64	99171	99	99721	34	99916	69	99978
65	99195	3,00	0,99730	35	99919	3,70	0,99978
66	99219	01	99739	36	99922	71	99979
67	99241	02	99747	37	99925	72	99980
68	99283	03	99755	38	99928	73	99981
69	99285	04	99763	39	99930	74	99982
2,70	0,99307	05	99771	3,40	0,99933	75	99982
71	99327	06	99779	41	99935	76	99983
72	99347	07	99786	42	99937	77	99984
73	99367	08	99793	43	99940	78	99984
74	99386	09	99800	44	99942	79	99985
75	99404	3,10	0,99806	45	99944	3,80	0,99986
76	99422	И	99813	46	99946	81	99986

77	99439	12	99819	47	99948	82	99987
78	99456	13	99825	48	99950	83	99987
79	99473	14	99831	49	99952	84	99988
2,80	0,99489	15	99837	3,50	0,99953	85	99988
81	99505	16	99842	51	99955	86	99989
82	99520	17	99848	52	99957	87	99989
83	99535	18	99853	53	99958	88	99990
84	99549	19	99858	54	99960	89	99990
85	99563	3,20	3,99863	55	99961	3,90	0,9990
86	99576	21	99867	56	99963	91	99991
87	99590	22	99872	57	99964	92	99992
88	99502	23	99876	58	99966	93	99992
89	99615	24	99880	59	99967	94	99992
2,90	3,99627	25	99855	3,60	0,99968	95	99992
91	99639	26	99889	61	99969	96	99993
92	99650	27	99892	62	99971	97	99993
93	99661	28	99896	63	99972	98	99993
94	99672	29	99800	64	99973	99	99993

Приложение 3

Значения функции *S(t)* для распределения Стьюдента

в зависимости от t и числа *k* степеней свободы

t \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0,2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1,0	0,750	789	804	813	818	822	825	827	828	830
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2,0	0,852	908	930	942	949	954	957	960	962	963
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993

3,2	904	957	975	984	988	991	992	994	995	995
3,4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997
3,6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998
3,8	918	969	984	990	994	996	997	997	998	998
4,0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999
4,2	926	974	988	993	996	997	998	998	999	999

Приложение 4

Таблица значения Fдля доверительной вероятности

***P* = (1 - 0,05) = 0,95**

K1 / K2	1	2	3	4	5	6	8	12	24
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04
2	18,54	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45
3	10,18	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84
7	6,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90
10	4,96	4,10 '	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96

26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95
27	4,21	3,35-	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74

Приложение 5

Значения α- процентных пределов *t a,k* в зависимости от *к* степеней свободы и заданного уровня значимости α для распределения Стьюдента

α / k	10,0	5,0	2,5	2,0	1,0	0,5	0,3	0,2	0,1
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,3	212,2	318,3	636,6
2	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,600
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,610
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,800	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,860	2,306	2,752	2,696	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	3,706	3,930	4,318
14	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,140
16	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	8,428	3,610	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,250	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,230	3,386	3,646
∞	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,090	3,291

Приложение 6

Таблица значений e-λ

λ	e-λ	λ	e-λ	λ	e-λ	λ	e-λ
1	2	1	2	1	2	1	2
0,00	1,0000	0,24	0,7866	0,48	0,6188	0,72	0,4868
01	0,9900	25	0,7788	49	0,6126	73	0,4819
02	0,9802	26	0,7711	0,50	0,6065	74	0,4771
03	0,9704	27	0,7634	51	0,6005	75	0,4724
04	0,9608	28	0,7558	52	0,5945	76	0,4677
05	0,9512	29	0,7483	53	0,5886	77	0,4630
06	0,9418	0,30	0,7408	54	0,5827	78	0,4584
07	0,9324	31	0,7334	55	0,5769	1/4π= =0,7854	0,4559
08	0,9231	32	0,7261	56	0,5712	79	0,4538
09	0,9139	33	0,7189	57	0,5655	0,80	0,4493
0,10	0,9048	34	0,7118	58	0,5599	81	0,4449
11	0,8958	35	0,7047	59	0,5543	82	0,4404
12	0,8869	36	0,6977	0,60	0,5488	83	0,4360
13	0,8781	37	0,6907	61	0,5434	84	0,4317
14	0,8694	38	0,6839	62	0,5379	85	0,4274
15	0,8607	39	0,6771	63	0,5326	86	0,4232
16	0,8251	0,40	0,6703	64	0,5273	87	0,4190
17	0,8437	41	0,6637	65	0,5220	88	0,4148
18	0,8353	42	0,6570	66	0,5169	89	0,4107
19	0,8270	43	0,6505	67	0,5117	0,90	0,4066
0,20	0,8187	44	0,6440	68	0,5066	91	0,4025
21	0,8106	45	0,6376	69	0,5016	92	0,3985
22	0,8025	46	0,6313	0,70	0,4966	93	0,3946
23	0,7945	47	0,6250	71	0,4916	94	0,3906
λ	e-λ	λ	e-λ	λ	e-λ	λ	e-λ
1	2	1	2	1	2	1	2

0,95	0,3867	1.21	0,2982	1,47	0,2299	1,72	0,1791
96	0,3829	22	0,2952	48	0,2276	73	0,1773
97	0,3791	23	0,2923	49	0,2254	74	0,1755
98	0,3753	24	0,2894	1,50	0,2231	75	0,1738
99	0,3716	25	0,2865	51	0,2209	76	0,1720
1,00	0,3679	26	0,2837	52	0,2187	77	0,1703
01	0,3642	27	0,2808	53	0,2165	78	0,1683
02	0,3606	28	0,2780	54	0,2144	79	0,1670
03	0,3570	29	0,2753	. 55	0,2122	1,80	0,1653
04	0,3535	1,30	0,2725	56	0,2101	81	0,1637
05	0,3499	31	0,2698	57	0,2080	82	0,1620
06	0,3465	32	0,2671	1/2π=	0,207	83	0,1604
				=1,57008			
07	0,3430	33	0,2645	58	0,2060	84	0,1588
08	0,3396	34	0,2618	59	0,2039	85	0,1572
09	0,3362	35	0,2592	1,60	0,2019	86	0,1557
1,10	0,3329	36	0,2567	61	0,1999	87	0,1541
11	0,3296	37	0,2541	62	0,1979	88	0,1526
12	0,3263	38	0,2561	63	0,1959	89	0,1511
13	0,3230	39	0,2491	64	0,1940	1,90	0,1496
14	0,3198	1,40	0,2466	65	0,1920	91	0,1481
15	0,3166	41	0,2441	66	0,1901	92	0,1466
16	0,3135	42	0,2417	67	0,1882	93	0,1451
17	0,3104	43	0,2393	68	0,1864	94	0,1437
18	0,3073	44	0,2369	69	0,1845	95	0,1423
19	0,3042	45	0,2346	1,70	0,1827	96	01409
1,20	0,3012	46	0,2322	71	0,1809	97	0,1395
						98	0,1381
						99	0,1367
						2,00	0,1353

Приложение 7

Таблица десятичных логарифмов

00 -∞	01 **0**	02 0,30103	03 0,47712	04 0,60206	05 0,69897	06 0,77815	07 0,8451	08 0,90309	09 0,95424
10 **1**	11 1,04139	12 1,07918	13 1,11394	14 1,14613	15 1,17609	16 1,20412	17 1,23045	18 1,25527	19 1,27875
20 1,30103	21 1,32222	22 1,34242	23 1,36173	24 1,38021	25 1,39794	26 1,41497	27 1,43136	28 1,44716	29 1,4624
30 1,47712	31 1,49136	32 1,50515	33 1,51851	34 1,53148	35 1,54407	36 1,5563	37 1,5682	38 1,57978	39 1,59106
40 1,60206	41 1,61278	42 1,62325	43 1,63347	44 1,64345	45 1,65321	46 1,66276	47 1,6721	48 1,68124	49 1,6902
50 1,69897	51 1,70757	52 1,716	53 1,72428	54 1,73239	55 1,74036	56 1,74819	57 1,75587	58 1,76343	59 1,77085
60 1,77815	61 1,78533	62 1,79239	63 1,79934	64 1,80618	65 1,81291	66 1,81954	67 1,82607	68 1,83251	69 1,83885
70 1,8451	71 1,85126	72 1,85733	73 1,86332	74 1,86923	75 1,87506	76 1,88081	77 1,88649	78 1,89209	79 1,89763
80 1,90309	81 1,90849	82 1,91381	83 1,91908	84 1,92428	85 1,92942	86 1,9345	87 1,93952	88 1,94448	89 1,94939
90 1,95424	91 1,95904	92 1,96379	93 1,96848	94 1,97313	95 1,97772	96 1,98227	97 1,98677	98 1,99123	99 1,99564

Приложение 8

Таблица случайных чисел

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5489	5583	3156	835	1988	3912	938	7460	869	4420
3522	935	7877	5665	7020	9555	7379	7124	7878	5544
7555	7579	2550	2487	9477	864	2349	1012	8250	2633
5759	3554	5080	9074	7001	6249	3224	6368	9102	2672
6303	6895	3371	3196	7231	2918	7380	438	7547	2644
7351	5634	5323	2623	7803	8374	2191	464	696	9529
7068	7803	8832	5119	6350	120	5026	3684	5657	304
3613	1428	1796	8447	503	5654	3254	7336	9536	1944
5143	4534	2105	368	7890	2473	4240	8652	9435	1422
9815	5144	7649	8638	6137	8070	5345	4865	2456	5708
5780	1277	6316	1013	2867	9938	3930	3203	5696	1769
1187	951	5991	5245	5700	5564	7352	891	6249	6568
4184	2179	4554	9083	2254	2435	2965	5154	1209	7069
2916	2972	9885	275	144	8034	8122	3213	7666	230
5524	1341	9860	6565	6981	9842	171	2284	2707	3008
146	5291	2354	5694	377	5336	6460	9585	3415	2358
4920	2826	5238	5402	7937	1993	4332	2327	6875	5230
7978	1947	6380	3425	7267	7285	1130	7722	164	8573
7453	653	3645	7497	5969	8682	4191	2976	361	9334
1473	6938	4899	5348	1641	3652	852	5296	4538	4456
8162	8797	8000	4707	1880	9660	8446	1883	9768	881
5645	4219	807	3301	4279	4168	4305	9937	3120	5547
2042	1192	1175	8851	6432	4635	5757	6656	1660	5389
5470	7702	6958	9080	5925	8519	127	9233	2452	7341
4045	1730	6005	1704	345	3275	4738	4862	2556	8333

5880	1257	6163	4439	7276	6353	6912	731	9033	5294
9083	4260	5277	4998	4298	5204	3965	4028	8936	5148
1762	8713	1189	1090	8989	7273	3213	1935	9321	4820
2023	2589	1740	424	8924	5	1969	1636	7237	1227
7965	3855	4765	703	1678	841	7543	308	9732	1289
7690	480	8098	9629	4819	7219	7241	5128	3853	1921
9292	426	9573	4903	5916	6576	8368	3270	6641	33
867	1656	7016	4220	2533	6345	8227	1904	5138	2537
505	2127	8255	5276	2233	3956	4118	8199	6380	6340
6295	9795	1112	5761	2575	6837	3336	9322	7403	8345
6223	2615	3410	3365	1117	2417	3176	2434	5240	5455
8672	8536	2966	5773	5412	8114	930	4697	6919	4569
1422	5507	7596	670	3013	1351	3886	3268	9469	2584
2653	1472	5113	5735	1469	9545	9331	5303	9914	6394
438	4376	3328	8649	8327	110	4549	7955	5275	2890
2851	2157	47	7885	1129	460	6821	8323	2572	8962
7962	2753	3077	8718	7418	8004	1425	3706	8822	1494
3837	4098	220	1217	4732	150	1637	1097	1040	7372
8542	4126	9374	2251	607	4301	8730	7690	6235	3477
139	765	8039	9484	2577	7859	1976	632	1418	6685
6687	1943	4307	579	8171	8224	8641	7034	3595	3875
6242	5582	5872	3197	4919	2792	5991	4058	9769	1918
6859	9606	522	4993	345	8958	1289	8825	6941	7685
6590	1932	6043	3623	1973	4112	1795	8465	2110	8045
3482	478	221	6738	7323	5643	4767	106	2272	9862

Боташев Руслан Азаматович

Байчорова Сапият Кадыевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИКИ

Учебное пособие

Редактор Н.В. Ефрюкова

Корректор Р.А. Боташев

Компьютерный набор С.К. Байчорова

Компьютерная верстка С.А. Бостанова

Подписано в печать 14.06. 2018

Формат 60x84/16

Бумага офисная

Объем: 14 п.л.

Тираж 100 экз.

Издательство Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева

369202 г. Карачаевск, ул. Ленина, 29

Лицензия ЛР №040310 от 21.10.1997

Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева

369202, г. Карачаевск, ул. Ленина,46